оповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2007

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 621.3(075.8)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко, С. Г. Попов**

Передаточные функции электрических колебательных систем

The transfer functions of electrical oscillating systems are defined. The structures of these systems with negative feedbacks are shown.

При исследовании процессов в электрических цепях эффективным является знание их передаточных функций относительно физических величин (токов, напряжений). Анализ литературных источников показал, что в настоящее время недостаточно справочных данных по передаточным функциям электрических колебательных цепей, представляющих собой последовательное и параллельное соединение активных и реактивных сопротивлений [1–3]. Обычные дифференциальные уравнения колебательных цепей не дают четкого представления функциональной связи элементов и тем более не отражают наличия обратных связей в этих цепях.

Из исследований механических колебательных систем [4, 5] видно, что в этих системах имеются как отрицательные, так и положительные обратные связи. Поэтому возникает вопрос: имеется ли аналогия в электрических колебательных системах? Для ответа, по нашему мнению, необходимо определить передаточные функции этих систем. В связи с такой постановкой рассмотрим схемы, изображенные на рис. 1 *а*, *б*, *в*, *г*, представляющие собой последовательное соединение резистора R, индуктивности L, емкости С (рис. 1, *а*), последовательное соединение R с параллельным соединением L и С (рис. 1, *б*) и систему соединения n-схем (рис. 1, *в*), каждая из которых собрана по схеме на рис. 1, *б*.

Определение передаточных функций будем осуществлять последовательно, начиная со схемы рис. 1, *а*. Для этой схемы дифференциальное уравнение имеет вид [3]

$$U = U_R + U_L + U_C = \mathrm{Ri} + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt, \qquad (1)$$

где U — входное напряжение; U_R, U_L, U_C — падения напряжений на R, L, C соответственно; I — электрический ток.

Будем определять передаточные функции

$$W_{\mathrm{I}a}(p) = \frac{I(p)}{U(p)}, \qquad W_{\mathrm{II}a}(p) = \frac{U_C(p)}{U(p)}, \qquad W_{\mathrm{III}a}(p) = \frac{U_L(p)}{U(p)}, \qquad W_{\mathrm{IV}a}(p) = \frac{U_R(p)}{U(p)},$$

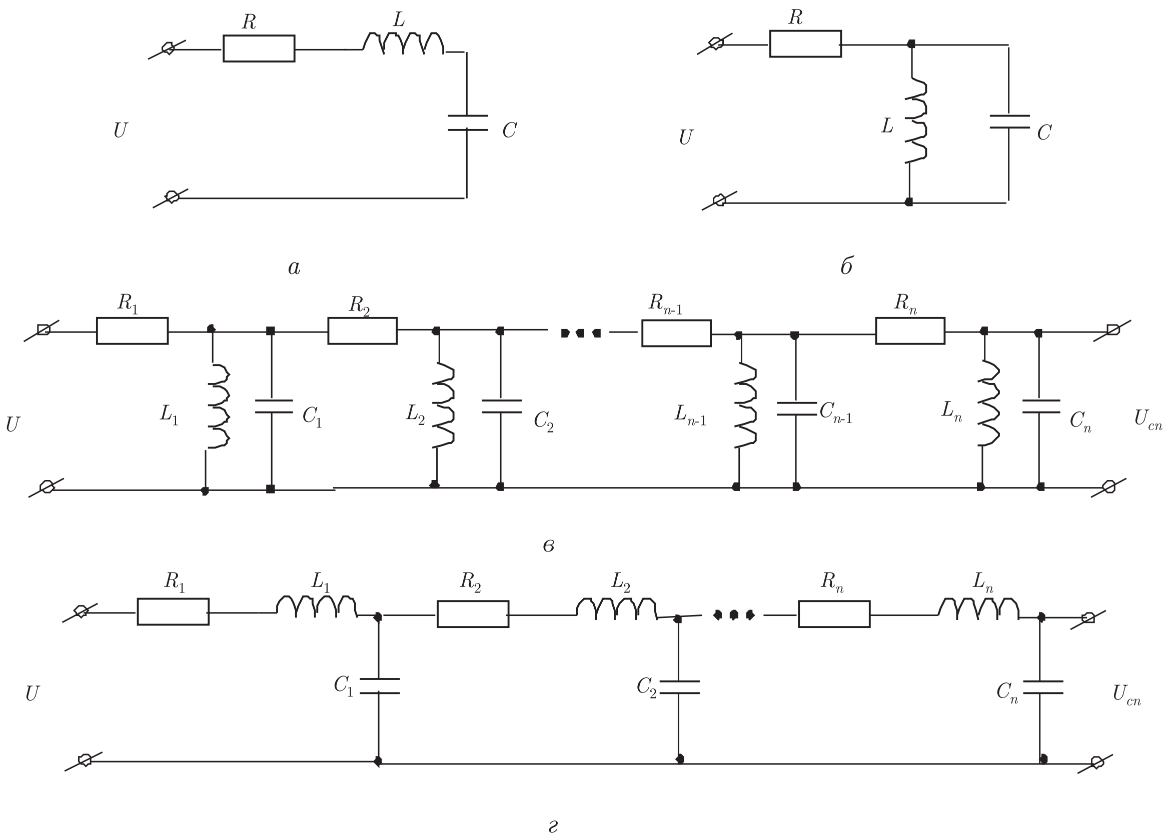


Рис. 1

где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования; $U(p)$, $I(p)$, $U_C(p)$, $U_L(p)$, $U_R(p)$ — изображения Карсона [6] напряжений U, U_C, U_L, U_R и тока i.

Для определения $W_1(p)$ продифференцируем (1) по времени. В результате получим уравнение

$$\frac{dU}{dt} = L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C},$$

которое в операционной форме имеет вид $pU(p) = I(p)(Lp^2+Rp+1/C)$, откуда передаточная функция

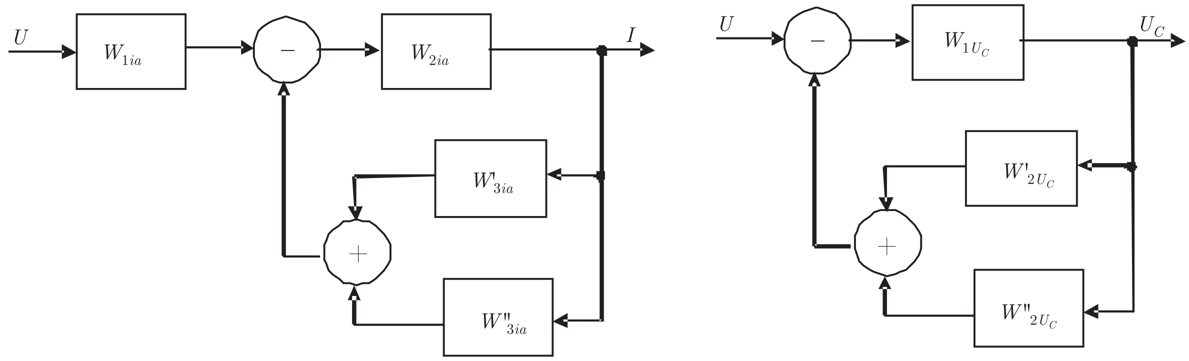
$$W_{\mathrm{Ia}}(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{p}{Lp^2 + Rp + \dfrac{1}{C}} = \frac{p}{Lp^2} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{Rp + 1/C}{Lp^2}} = \frac{W_{1ia} \cdot W_{2ia}}{1 + W_{2ia} \cdot W_{3ia}}, \qquad (2)$$

где $W_{1ia} = W_{1ia}(p) = p$, $W_{2ia} = W_{2ia}(p) = 1/(Lp^2)$, $W_{3ia} = W_{3ia}(p) = Rp + 1/C$.

Структурная схема, соответствующая (2), изображена на рис. 2, *а*, где $W'_{3ia} = Rp$, $W''_{3ia} = 1/C$.

Перейдем к определению $W_{\mathrm{IIa}}(p)$. Относительно U_C уравнение (1) запишется в виде

$$U = LC\frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC\frac{dU_C}{dt} + U_C,$$



а *б*

Рис. 2

или, в операционной форме, $U(p) = U_C(p)(LCp^2 + RCp + 1)$, откуда

$$W_{\mathrm{II}a}(p) = \frac{U_C p}{U(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{1}{LCp^2}\frac{1}{1 + \dfrac{RCp + 1}{LCp^2}} = \frac{W_{1U_Ca}}{1 + W_{1U_Ca}W_{2U_Ca}}, \tag{3}$$

где $W_{1U_Ca} = W_{1U_Ca}(p) = 1/(LCp^2)$, $W_{2U_Ca} = W_{2U_Ca}(p) = RCp + 1$.

Структурная схема, соответствующая (2), представлена на рис. 2, *б*, где $W'_{2U_Ca} = RCp$, $W''_{2U_C\text{б}} = 1$.

Далее найдем $W_{\mathrm{III}a}(p)$. С учетом того, что

$$i = \frac{1}{L}\int U_L dt,$$

уравнение (1) принимает вид

$$U = \frac{R}{L}\int U_L dt + U_L + \frac{1}{LC}\int \left(\int U_L dt\right) dt.$$

Продифференцировав это уравнение по t два раза, получим

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{R}{L}\cdot\frac{dU_L}{dt} + \frac{d^2U_L}{dt^2} + \frac{1}{C}U_L,$$

или, в операционной форме,

$$p^2U(p) = \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}\right)U_L(p),$$

откуда

$$W_{\mathrm{III}a}(p) = \frac{U_L(p)}{U(p)} = \frac{p^2}{p^2 + \dfrac{R}{L}p + \dfrac{1}{LC}} = \frac{p^2}{p^2\left(1 + \dfrac{(R/L)p + 1/C}{p^2}\right)} = \frac{W_{1U_La}W_{2U_La}}{1 + W_{2U_La}W_{3U_La}}, \tag{4}$$

где $W_{1U_La} = W_{1U_La}(p) = p^2$, $W_{2U_La} = W_{2U_La}(p) = 1/p^2$, $W_{3U_La} = W_{3U_La}(p) = (R/L)p +$ $+ 1/(LC)$.

Структура, соответствующая (4), изображена на рис. 2, *а*. Здесь $W'_{3U_La} = (R/L)p$, $W''_{3U_La} = 1/(LC)$ и все передаточные функции имеют индекс IV. Для определения $W_{\mathrm{IV}a}(p)$ представим (1) в виде

$$\frac{dU}{dt} = \frac{L}{R}\frac{d^2U_R}{dt^2} + \frac{dU_R}{dt} + \frac{U_R}{CR},$$

или, в операционной форме,

$$pU(p) = U_R(p)\left(\frac{L}{R}p^2 + p + \frac{1}{CR}\right),$$

откуда

$$W_{\mathrm{IV}a}(p) = \frac{U_R(p)}{U(p)} = \frac{p}{\dfrac{L}{R}p^2 + p + \dfrac{1}{CR}} = \frac{p}{\dfrac{L}{R}p^2}\frac{1}{1 + \dfrac{p + 1/(CR)}{(L/R)p^2}} = \frac{W_{1U_Ra}W_{2U_Ra}}{1 + W_{2U_Ra}W_{3U_Ra}}, \qquad (5)$$

где $W_{1U_Ra} = W_{1U_Ra}(p) = p$, $W_{2U_Ra} = W_{2U_Ra}(p) = L/(Rp^2)$, $W_{3U_Ra} = W_{3U_Ra}(p) = p + 1/(CR)$.

Структура, соответствующая (5), аналогична структуре, изображенной на рис. 2, *а*. Но здесь вместо W_{1ia}, W_{2ia}, W'_{3ia}, W''_{3ia} должны быть $W_{1U_R\text{б}}$, $W_{2U_R\text{б}}$, $W'_{3U_R\text{б}} = p$, $W''_{3U_R\text{б}} = 1/(CR)$.

Как видно из данного исследования, электросхема с последовательным соединением R, L, C представляет собой относительно U_R, U_L, U_C, i замкнутую систему, охваченную отрицательными обратными связями, которые, в принципе, не нарушают устойчивость функционирования схемы. Кроме того, в передаточную функцию $W_{\mathrm{III}a}(p)$ входит звено двойного дифференцирования, а в передаточные функции $W_{\mathrm{I}a}(p)$, $W_{\mathrm{IV}a}(p)$ — звенья дифференцирования.

Перейдем к схеме рис. 1, *б*. Будем определять передаточные функции

$$W_{\mathrm{I}\text{б}}(p) = \frac{U_C(p)}{U(p)}, \qquad W_{\mathrm{II}\text{б}}(p) = \frac{I(p)}{U(p)}, \qquad W_{\mathrm{III}\text{б}}(p) = \frac{I_L(p)}{U(p)}, \qquad W_{\mathrm{IV}\text{б}}(p) = \frac{I_C(p)}{U(p)}.$$

Уравнения, соответствующие процессам в этой системе, следующие [3]:

$$\left.\begin{aligned} &i = i_L + i_C, \qquad U_C = L\frac{di_L}{dt}, \qquad i_C = C\frac{dU_C}{dt}, \\ &U = Ri + U_C, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где i — общий ток; i_L, i_C — токи, идущие через L и C соответственно.

Для нахождения $W_{\mathrm{I}\text{б}}(p) = U_C(p)/U(p)$ на основании (6) получим

$$U = \frac{R}{L}\int U_C dt + RC\frac{dU_C}{dt} + U_C. \qquad (7)$$

Продифференцировав по времени уравнение (7), имеем

$$\frac{dU}{dt} = \frac{R}{L}U_C + RC\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{dU_C}{dt},$$

или, в операционной форме,

$$pU(p) = \left(RCp^2 + p + \frac{R}{L}\right)U_C(p),$$

откуда

$$W_{\text{Iб}}(p) = \frac{U_C(p)}{U(p)} = \frac{p}{RCp^2 + p + \dfrac{R}{L}} = \frac{p}{RCp^2}\frac{1}{1 + \dfrac{p + R/L}{RCp^2}} = \frac{W_{1U_C\text{б}}W_{2U_C\text{б}}}{1 + W_{2U_C\text{б}}W_{3U_C\text{б}}}, \tag{8}$$

где $W_{1U_C\text{б}} = p$, $W_{2U_C\text{б}} = \dfrac{1}{RCp^2}$, $W_{3U_C\text{б}} = p + R/L$.

Структура, соответствующая (8), аналогична структуре рис. 2, *а*. Здесь вместо W_{kia}, $k = \overline{1,3}$, необходимо подставить $W_{kU_C\text{б}}$, $k = \overline{1,3}$, и на выходе должно быть U_C.

Для определения $W_{\text{IIб}}(p) = I(p)/U(p)$ из (6) составляем уравнения

$$U_C = \frac{1}{C}\int i_C dt = \frac{1}{C}\int (i - i_L)dt = \frac{1}{C}\int idt - \frac{1}{C}\int i_L dt = \frac{1}{C}\int idt - \frac{1}{CL}\int\left(\int U_C dt\right)dt.$$

Продифференцируем два раза по времени это уравнение. В результате получаем $\dfrac{d^2U_C}{dt^2} + \dfrac{1}{CL}U_C = \dfrac{1}{C}\dfrac{di}{dt}$. Выразив это уравнение в операционной форме, получим

$$U_C(p) = I(p)\frac{p}{C}\frac{1}{p^2 + \dfrac{1}{CL}}. \tag{9}$$

Подставим (9) в (7), которое также выразим в операционной форме, и тогда имеем $U(p) = I(p)(RCp^2 + p + R/L)$, откуда

$$W_{\text{IIб}}(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{1}{RCp^2 + p + \dfrac{R}{L}} = \frac{1}{RCp^2\left(1 + \dfrac{p + R/L}{RCp^2}\right)} = \frac{W_{1i\text{б}}}{1 + W_{1I\text{б}}W_{2I\text{б}}}, \tag{10}$$

где $W_{1I\text{б}} = 1/(RCp^2)$, $W_{2I\text{б}} = p + R/L = W'_{2I\text{б}} + W''_{2I\text{б}}$, $W'_{2I\text{б}} = p$, $W''_{2I\text{б}} = R/L$.

Структура, соответствующая (10), аналогична структуре, изображенной на рис. 2, *б*. Здесь только другие (см. (9)) передаточные функции составляющих элементов.

Для определения $W_{\text{IIIб}}(p) = I_L(p)/U(p)$ из уравнения (7) с учетом того, что $i_L = (1/L)\int U_C dt$, получаем уравнение

$$U = RCL\frac{d^2i}{dt^2} + L\frac{di_L}{dt} + Ri_L,$$

или, в операционной форме, $U(p) = I_L(p)(RCLp^2 + Lp + R)$, откуда

$$W_{\text{IIIб}}(p) = \frac{I_L(p)}{U(p)} = \frac{1}{RCLp^2 + Lp + R} = \frac{1}{RCLp^2}\frac{1}{1 + \dfrac{Lp + R}{RCLp^2}} = \frac{W_{1I_L\text{б}}}{1 + W_{1I_L\text{б}}W_{2I_L\text{б}}}, \tag{11}$$

где $W_{1I_L\text{б}} = W_{1I_L\text{б}}(p) = 1/(RCLp^2)$, $W_{2I_L\text{б}} = W_{2I_L\text{б}}(p) = Lp + R$.

Структура, соответствующая (11), аналогична структуре, изображенной на рис. 2, *б*. Здесь необходимо подставить свои $W_{1I_L\text{б}}$, $W_{2I_L\text{б}}$ и $W'_{2I_L\text{б}} = Lp$, $W''_{2I_L\text{б}} = R$.

Далее определим $W_{\text{IVб}}(p)$. Из уравнения (6) имеем

$$U = R(i_L + i_C) + \frac{1}{C}\int i_C dt = Ri_C + \frac{R}{L}\int U_C dt + \frac{1}{C}\int i_C dt = Ri_C \int\left(\int i_C dt\right) + \frac{1}{C}\int i_C dt.$$

Продифференцировав два раза по времени это уравнение, получаем

$$\frac{d^2U}{dt^2} = R\frac{d^2 i_C}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{di_C}{dt} + \frac{R}{LC}i_C,$$

или, в операционной форме,

$$p^2U(p) = I_C(p)\left(Rp^2 + \frac{1}{C}p + \frac{R}{LC}\right),$$

откуда

$$W_{\text{IVб}}(p) = \frac{I_C(p)}{U(p)} = \frac{p^2}{Rp^2 + \dfrac{1}{C}p + \dfrac{R}{LC}} = \frac{p^2}{Rp^2\left(1 + \dfrac{(1/C)p + R/(LC)}{Rp^2}\right)} =$$

$$= \frac{W_{1I_C\text{б}}}{1 + W_{2I_C\text{б}}W_{3I_C\text{б}}}, \tag{12}$$

где $W_{1I_C\text{б}} = W_{1I_C\text{б}}(p) = p^2$, $W_{2I_C\text{б}} = W_{2I_C\text{б}}(p) = 1/(Rp^2)$, $W_{3I_C\text{б}} = W_{3I_C\text{б}}(p) = (1/C)p + R/(LC)$.

Структура, соответствующая (12), аналогична структуре, изображенной на рис. 2, *а*. Здесь только необходимо подставить значения передаточных функций $W_{3I_C\text{б}} = W'_{3I_C\text{б}} + W''_{3I_C\text{б}}$, где $W'_{3I_C\text{б}} = (1/C)p$, $W''_{3I_C\text{б}} = R/(LC)$.

Определим передаточную функцию системы, изображенной на рис. 1, *в*, $W_\Sigma(p) = U_{Cn}(p)/U(p)$. Для этого определим передаточную функцию системы $R_k + L_k||C_k$, $k = \overline{1,n}$, на входе которой напряжение $U_{C(k-1)}$, а на выходе U_{Ck}. На основании (6) и (7)

$$W_k(p) = \frac{W_{1k}(p)}{1 + W_{2k}(p)W_{3k}(p)}, \tag{13}$$

где $W_{1k}(p) = p$, $W_{2k}(p) = 1/(R_kC_kp^2)$, $W_{3k}(p) = p + R_k/L_k$.

Структура, соответствующая (13), изображена на рис. 2, *а*. Здесь только необходимо подставить $W_{1k}(p)$, $W_{2k}(p)$, $W'_{3k}(p) = p$, $W''_{3k}(p) = R_k/L_k$. Общая передаточная функция системы рис. 2, *в* имеет вид

$$W_\Sigma(p) = \prod_{k=1}^{n} W_k p. \tag{14}$$

Структура, соответствующая всей системе рис. 1, *в*, изображена на рис. 3.

Теперь определим передаточную функцию $W_\Sigma(p) = U_{Cn}/U$ колебательной системы, изображенной на рис. 1, *г*. Как для схемы рис. 1, *в*, так и в данном случае, будем считать

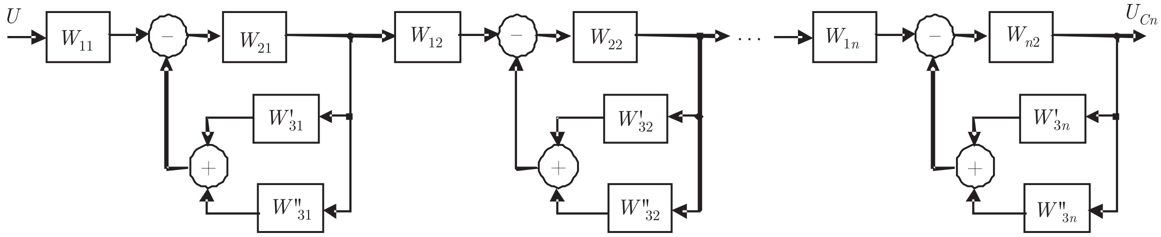


Рис. 3

$z_{C(k-1)} \ll R_k$, $k = \overline{1,n}$. Тогда для каждой отдельной схемы $R_k \to L_k \to C_k$ справедлива передаточная функция вида (3), т. е.

$$W_k(p) = \frac{U_{Ck}(p)}{U_{C(k-1)}(p)} = \frac{W_{1k}}{1 + W_{1k}W_{2k}}, \tag{15}$$

где $W_{1k} = 1/(L_k C_k p^2)$, $W_{2k} = R_k C_k p + 1$.

Структурная схема, соответствующая $W_k(p)$, аналогична схеме, изображенной на рис. 2, *б*. Здесь только необходимо вместо $W_{1U_C}, W'_{2U_C}, W''_{2U_C}$ подставить $W_{1k}, W'_{2k} = R_k C_k p$, $W''_{2k} = 1$ соответственно. Передаточная функция всей системы, изображенной на рис. 1, *г*, имеет вид

$$W_\Sigma(p) = \prod_{k=1}^{n} W_k(p), \tag{16}$$

где $W_k(p)$ определяются по формуле (15).

Структура, соответствующая (16), изображена на рис. 4.

Проанализируем все полученные передаточные функции. Как видно из данных исследований, в структуре колебательных электрических систем имеются отрицательные обратные связи, позволяющие этим системам устойчиво функционировать. Эти отрицательные обратные связи формируются из суммы дифференцирующего и безынерционного звеньев. Звеном, которое охватывается отрицательной обратной связью, в этих системах является двойной интегратор, соответствующий в механических колебательных системах инерционному элементу. Заметим, что в механических колебательных системах имеются положительные обратные связи [4, 5], которые в некоторых случаях обусловливают неустойчивость в функционировании. Предполагаемое отсутствие в электрических колебательных системах положительных обратных связей приводит к предварительному выводу о дополнительном анализе в справедливости теории электродинамической аналогии механических и электрических колебательных систем. Знание полученных передаточных функций облегчает анализ функционирования рассматриваемых систем и позволяет выявить более детально энергетику их колебаний.

С учетом проведенного анализа можно отметить следующий факт. Пусть имеется объект, передаточная функция которого

$$W(p) = \frac{A}{a_n p^n + a_{n-1} p^n + \cdots + a_1 p + a_0} = \frac{A}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k p^k}. \tag{17}$$

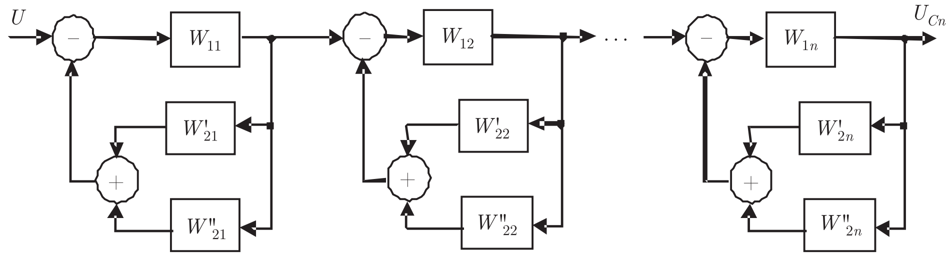


Рис. 4

В (17) осуществим преобразования

$$W(p) = \frac{1}{a_n p^n} \frac{A}{1 + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k p^k}{a_n p^n}} = \frac{A W_{1n}}{1 + W_{1n} W_{2(n-1)}}. \tag{18}$$

Как видно из (18), объект представляет собой звено с $W_{1n}(p)$, охваченное суммой отрицательных обратных связей $W_{2(n-1)} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k p^k$. В свою очередь

$$W_{2(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k = \frac{1}{a_{n-1} p^{n-1}} \frac{1}{1 + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k p^k}{a_{n-1} p^{n-1}}} = \frac{W_{1(n-1)}}{1 + W_{2(n-2)} W_{1(n-1)}},$$

т. е. звено с $W_{1(n-1)} = 1/(a_{n-1} p^{n-1})$ охватывается отрицательными обратными связями с передаточной функцией $W_{2(n-2)} = \sum\limits_{k=0}^{n-2} a_k p^k$.

Такую процедуру с дополнительным умножением и делением на выносимый член можно продолжить, вплоть до звена с передаточной функцией $W_{11}(p) = 1/(a_1 p)$, которое охватывается отрицательной обратной связью с передаточной функцией $W_{20}(p) = a_0$. Приведем упрощенный пример. Пусть $W(p) = 1/(ap^3 + bp^2 + cp + d)$. Преобразуем $W(p)$ так:

$$W(p) = \frac{1}{ap^3\left(1 + \dfrac{bp^2 + cp + d}{ap^3}\right)} = \frac{1}{ap^3} \frac{1}{1 + \dfrac{(bp^2)^2(1 + (cp + d)/(bp^2))}{bp^2 ap^3}} =$$

$$= \frac{1}{ap^3} \frac{1}{1 + \dfrac{(bp^2)^2[1 + (cp)^2/(cpbp^2)(1 + d/(cp))]}{bp^2 ap^3}} =$$

$$= \frac{W_1}{1 + W_1 W_2 W_3 [1 + W_3 W_4 W_5 (1 + W_5 W_6)]}, \tag{19}$$

$$W_1 = W_1(p) = \frac{1}{ap^3}, \qquad W_2 = W_2(p) = (bp^2)^2, \qquad W_3 = W_3(p) = \frac{1}{bp^2},$$

$$W_4 = W_4(p) = (cp)^2, \qquad W_5(p) = \frac{1}{cp}, \qquad W_6 = W_6(p) = d.$$

Таким образом, общая передаточная функция $W(p)$, определяемая (18) и на примере (19), может быть выражена последовательностью дробей. При таком рассмотрении каждое предыдущее по индексу k, начиная от n и до 1, охватывается отрицательными обратными связями. Вызывает интерес такой вопрос: может ли в системе $W(p) = (18)$ наличие последовательности отрицательных обратных связей создать положительные обратные связи, обусловленные неустойчивостью в функционировании системы. В этом плане, по нашему мнению, целесообразно осуществить сравнение критериев устойчивости [1, 2] с последовательным определением знака обратной связи с рассматриваемой системе (18).

Кроме того, следует заметить, что представленные ООС ставить в абсолют неправомерно по следующей причине. Индуктивное и емкостное сопротивления в символической форме записываются в виде [3] $x_L = j\omega L$, $x_C = 1/(j\omega c) = -j\omega/(\omega^2 c)$, где $j = \sqrt{-1}$. В операционной форме [3, 6] эти сопротивления записываются так: $x_L(p) = pL$, $x_C(p) = -p/(\omega^2 c)$. Тогда в ООС $x_L(p)$ формирует ООС, а $x_C(p)$ — положительную ОС (ПОС). А это означает, что устойчивость или неустойчивость функционирования схем с L и C определяется превалированием друг перед другом $x_L(p)$ или $x_C(p)$. При $x_L(p) = x_C(p)$ в рассматриваемых схемах имеется явление резонанса.

1. *Теоретические* основы связи и управления / Под ред А. А. Фельдбаума. – Москва: Физматгиз, 1963. – 932 с.
2. *Теория* автоматического управления / Под ред. д. т. н., проф. А. В. Нетушина. – Москва: Высш. шк., 1976. – 400 с.
3. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники (электрические цепи). – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
4. *Божко А. Е.* Синтез оптимального управления колебательных систем. – Киев: Наук. думка, 1990. – 164 с.
5. *Божко А. Е.* К анализу колебательных механических систем // Доп. НАН України. – 2004. – № 3. – С. 37–40.
6. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 09.10.2006