2. *Guz A. N., Zozulya V. V., Menshikov A. V.* General spatial dynamic problem for an elliptic crack under the action of a normal shear wave, with consideration for the contact interaction of the crack faces // Intern. Appl. Mechanics. – 2004. – **40**, No 2. – P. 156–159.
3. *Menshikov A. V., Menshikova M. V., Wendland W. L.* On the use of the Galerkin method to solve the fracture mechanics problem for a linear crack under normal loading // Ibid. – 2005. – **41**, No 11. – P. 1324–1329.
4. *Меньшиков В. А., Меньшиков А. В.* Гранично-контактные интегральные уравнения динамической задачи теории упругости о трещине на поверхности раздела полупространств // Доп. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 51–56.
5. *Меньшиков В. А.* Сингулярные ядра интегральных уравнений в задаче о трещине на границе раздела полупространств при гармоническом нагружении // Там же. – № 11. – С. 58–62.

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 16.03.2007

УДК 532.546

В. Л. Поляков

Кризис сопротивления в несвязных средах при внутренней суффозии, обусловленной действием линейных источников (дрен-увлажнителей)

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Я. Олейником)

Based on an axisymmetric model of hydrodynamic deformations, the theoretical study of the abrupt initial fall in resistance to a groundwater flow from the solid component of a porous medium (resistance crisis) due to the internal piping caused by a linear source is performed. The effect of model parameters on the source intensity is analyzed for two typical natural media (mineral and organic suffosive soils).

Регулирование водного режима особенно эффективно в несвязных пористых средах благодаря их обычно высокой проницаемости. На практике оно осуществляется путем чередования циклов осушения и увлажнения. При этом на дренах, как основном управляющем средстве, напор периодически резко меняется. Естественные несвязные среды (грунты) обычно содержат относительно большое количество мелких неструктурных (суффозионных) частиц [1]. В реальных условиях подъем (снижение) напора на дрене способен значительно интенсифицировать фильтрационный процесс по крайней мере вблизи нее. Вследствие ускорения течения поровой воды гидродинамическая сила в этой части фильтрационного потока ощутимо возрастает и при превышении ею некоторого порового значения суффозионные частицы здесь мобилизуются [3]. При работе дрены в качестве увлажнителя указанные частицы оттесняются от нее и сосредоточиваются в узкой зоне. Важно, что эта аккумулирующая зона локализована около водоисточника, где имеют место как раз основные потери напора. Ее внешняя граница остается неподвижной, а положение последней определяется расходом источника [4]. Вместе с тем внутренняя граница, отделяющая аккумулирующую зону от “чистой” (не содержит неструктурных частиц), приближается к внешней. В течение короткого времени в порах периферийной части области деформаций может накопиться столько взвеси, что сопротивление движению жидкой фазы среды со стороны твердой увеличится многократно. Из-за этого расход источника при фиксированном перепаде граничных напоров упадет, а значит, увлажнение станет малоэффективным.

Явление внутренней суффозии, описанное выше на примере дрены-увлажнителя, включает специфический эффект, который проявляется в начале деформаций и положительно отражается на ее работе. Этот эффект обеспечивает кратковременное заметное усиление действия источника. Речь идет о скачкообразном уменьшении вышеупомянутого сопротивления при включении механизма фильтрационных деформаций. В соответствующий момент времени суффозионные частицы, согласно принятой математической модели [5, 6] (базируется на утверждении об их динамическом равновесии благодаря равенству сил сопротивления и давления), мгновенно приобретают конечные скорости, величина которых тесно связана с положением частиц относительно источника. В действительности набор скорости частицами является своего рода переходным процессом. Для его описания требуется дополнительно рассмотреть силы инерции. Протекает этот процесс по сравнению с деформационным и фильтрационным очень быстро, что дает основание им пренебречь.

Естественно, отмеченная мобилизация неструктурного вещества повлечет за собой падение потерь напора (кризис сопротивления), и будет способствовать интенсификации фильтрационного процесса. В последующем, по мере развития деформаций и образования вблизи источника слоя кольматажа его расход будет неуклонно снижаться. Но, конечно, для корректной оценки последствий перераспределения и осаждения взвеси необходимо уметь точно находить фактический исходный расход водоисточника (дренажа). Сделать это, а также провести разносторонний анализ значимости фильтрационных деформаций целесообразно на базе осесимметричного уравнения движения в пористой среде жидкости, которая содержит неассоциированные с ней твердые частицы,

$$n_w\left(\frac{u}{k_s}+\frac{u_k}{k_c}\right)=-\frac{\partial H}{\partial r}. \qquad (1)$$

Здесь n_w — текущая пористость, $n_w = 1 - m_s - n_c$; m_s, n_c — доли пространства, занятые структурными и подвижными неструктурными частицами; u_k, u — критическая и средняя (в порах) скорости течения жидкости; k_s, k_c — эмпирические коэффициенты, родственные коэффициентам фильтрации применительно к физическим системам: жидкость — структурная компонента пористой среды (неподвижна) и — неструктурная твердая компонента среды (подвижная или неподвижная); H — напор. По существу уравнение (1) есть обобщение закона Дарси на случай фильтрации двухфазного потока, дисперсная фаза которого движется несинхронно с носителем.

Ключевым вопросом при определении потерь напора является установление коэффициентов k_s, k_c, что возможно двумя путями. В основе первого лежат формулы, полученные чисто эмпирически или с привлечением упрощенных структурных схем (системы капилляров или сферических частиц) для природных или искусственных пористых сред [7]. Второй путь базируется на данных экспериментальных исследований осаждения взвешенных частиц в стесненных условиях [8]. Обязательное требование к разрабатываемым для k_s, k_c формулам заключается в том, что они должны аккуратно учитывать, с одной стороны, существенную разнородность мехсостава твердого вещества (структурные + суффозионные частицы), а с другой стороны подвижность его неструктурной составляющей. Ниже выбран второй подход. Первый же был реализован при теоретическом изучении внешней суффозии [6]. Исходя из выражений для скоростей осаждения взаимодействующих частиц суспензии, были строго выведены следующие формулы:

$$k_s = \frac{g}{146{,}3\nu} \frac{d_s^2 n_w^4}{m_s^2(1-n_c)^2}, \qquad k_c = \frac{g}{146{,}3\nu} \frac{d_c^2 n_w^4}{(1-m_s)^2 n_c^2}, \tag{2}$$

где g — ускорение земного притяжения; ν — кинетическая вязкость; d_s, d_c — эквивалентные диаметры структурных и неструктурных частиц соответственно. Существенные различия в характерном времени деформации среды и фильтрации жидкости дают право считать суффозионный процесс нестационарным, который происходит на фоне стационарного фильтрационного и начинается в определенный момент времени (для удобства принимается $t = 0$).

Таким образом, первоначально ($t < 0$) среда сложена из обоих твердых неподвижных компонент, а ее коэффициент фильтрации k_0 выражается через исходные (при $t \leqslant 0$) значения k_{s0}, k_{c0}, а именно,

$$k_0 = \frac{k_{s0} k_{c0}}{k_{s0} + k_{c0}}, \tag{3}$$

где $k_{s0} = k_s(0)$, $k_{c0} = k_c(0)$. Значения k_{s0}, k_{c0} предлагается вычислять по формулам (2), полагая $n_c = m_c$ (m_c — постоянная объемная концентрация неструктурных частиц в недеформированной среде). При введении безразмерных переменных и параметров в качестве одного из масштабов как раз и использовался коэффициент k_0. Естественно, что тогда относительный коэффициент фильтрации недеформированной среды равен 1.

В момент $t = 0$ суффозионные частицы в соответствии с принятой математической моделью квазистационарной фильтрации (ее нестационарность связана только с изменением концентрации n_c) начинают перемещаться уже с некоторой ненулевой скоростью. Это не отвечает действительности, но серьезно облегчает исследование механического состояния деформируемой при увлажнении среды. В итоге скорость мобилизованных частиц относительно жидкости сразу падает до характерной величины — критической скорости. Тем самым предопределяется резкое снижение сопротивления потоку жидкости и, как следствие, потерь напора. Другими словами, наблюдается кризис сопротивления. Его мерой отчасти может служить начальный эквивалентный коэффициент фильтрации k_e^0, который рекомендуется вычислять по формуле

$$k_e^0 = \frac{k_{s0} k_{c0} u^0}{k_{s0} u_k + k_{c0} u^0}. \tag{4}$$

Здесь коэффициент $k_e^0 = k_e(0)$ уже не является постоянной величиной, поскольку начальная скорость u^0 с приближением к источнику быстро нарастает. Чтобы найти k_e^0 и, таким образом, получить возможность рассчитывать указанный кризис, следует воспользоваться давно известным решением осесимметричной стационарной задачи фильтрационного течения при заданных напорах на границах области движения. Выражается оно зависимостью

$$\widetilde{H} = \frac{H_d - H}{H_d - H_R} = \frac{\ln \dfrac{r}{r_0}}{\ln \dfrac{R}{r_0}}, \tag{5}$$

где H_d, H_R — постоянные напоры, заданные на контурах питания ($r = r_0$) и разгрузки ($r = R$). Отсюда скорость жидкости в недеформированной среде ($t < 0$) запишется

$$u_0 = \frac{k_0(H_d - H_k)}{1 - m_s - m_0} \frac{1}{r \ln \dfrac{R}{r_0}}. \tag{6}$$

Начальное распределение приведенного напора $\widetilde{H}$ в области движения ($1 \leqslant \overline{r} \leqslant \overline{R}$) находится в результате интегрирования трансформированного уравнения (1)

$$\overline{u}^0 = \frac{\overline{R}\chi}{1 - \beta} \overline{k}_e^0(\overline{r}) \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \overline{r}}, \tag{7}$$

где $\chi = \dfrac{k_0(H_d - H_R)}{u_k R(1 - m_s)}$, символ „0" здесь и далее при фильтрационных характеристиках указывает на их начальные значения.

Полные потери механической энергии определяются заданными значениями напора H_d, H_R на границах области движения $r = r_0$ и $r = R$. Однако распределение напора здесь находится в тесной связи с физико-механическими свойствами грунта, водно-физическими условиями в нем. Устанавливается оно в рассматриваемом случае начальных деформаций ($\overline{t} = 0$) путем реализации простой фильтрационной задачи, которая в безразмерной форме выражается таким образом:

$$(1 - \beta)\left(\frac{\overline{u}^0}{\overline{k}_{s0}} + \frac{1}{\overline{k}_{c0}}\right) = -\frac{\partial \widetilde{H}_1^0}{\partial \overline{r}}, \qquad 1 \leqslant \overline{r} \leqslant \overline{r}_a, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{r}}\left(\overline{r}\frac{\partial \widetilde{H}_2^0}{\partial \overline{r}}\right) = 0, \qquad \overline{r}_a < \overline{r} \leqslant \overline{R}, \tag{9}$$

$$\overline{r} = 1, \qquad \widetilde{H}_1^0 = 0; \qquad \overline{r} = R, \qquad \widetilde{H}_2^0 = 1; \tag{10}$$

$$\overline{r} = \overline{r}_a, \qquad \widetilde{H}_1^0 = \widetilde{H}_2^0; \qquad \overline{k}_e^0(\overline{r}_a)\frac{\partial \widetilde{H}_1^0}{\partial \overline{r}} = \frac{\partial \widetilde{H}_2^0}{\partial \overline{r}}, \tag{11}$$

причем $\overline{u}^0 = \dfrac{u^0}{u_k}$, $\overline{k}_{s0} = \dfrac{k_{s0}}{k_0}$, $\overline{k}_{c0} = \dfrac{k_{c0}}{k_0}$, $\overline{k}_e = \dfrac{k_e}{k_0}$, $\overline{r} = \dfrac{r}{r_0}$, r_0 — радиус источника, $\overline{r}_a = \dfrac{r_a}{r_0}$, r_a — радиус внешней границы аккумулирующей зоны (области деформаций). Выражение для $\overline{u}^0$ вытекает из справедливого в области деформаций $1 \leqslant \overline{r} \leqslant \overline{r}_a$ соотношения [6]

$$\overline{Q} = \overline{r}(\overline{u} - \beta\overline{n}_c), \tag{12}$$

так что

$$\overline{u}^0 = \frac{\overline{Q}^0}{\overline{r}} + \beta, \tag{13}$$

где $\overline{Q}^0 = \dfrac{Q^0}{2\pi r_0 u_k(1 - m_s)}$, $\beta = \dfrac{m_c}{1 - m_s}$, $\overline{n}_c = \dfrac{n_c}{m_c}$. Решение задачи (8)–(11), прежде всего, дает следующие обобщенные представления для искомых функций-напоров $\widetilde{H}_i^0(\overline{r}, \overline{t})$:

$$\widetilde{H}_1^0 = \frac{1 - \beta}{\overline{R}\chi}\left[\overline{Q}^0 \int_1^{\overline{r}} \frac{d\overline{r}}{\overline{r}\overline{k}_e^0(\overline{r})} + \beta \int_1^{\overline{r}} \frac{d\overline{r}}{\overline{k}_e^0(\overline{r})}\right], \qquad 1 \leqslant \overline{r} \leqslant \overline{r}_a, \tag{14}$$

$$\widetilde{H}_2^0 = 1 + \left\{ \frac{1-\beta}{\overline{R}\chi} \left[\overline{Q}^0 \int\limits_1^{\bar r} \frac{d\bar r}{\bar r \overline{k}_e^0(\bar r)} + \beta \int\limits_1^{\bar r} \frac{d\bar r}{\overline{k}_e^0(\bar r)} \right] - 1 \right\} \frac{\ln \dfrac{\bar r}{\overline{R}}}{\ln \dfrac{\bar r_a}{\overline{R}}}, \qquad \bar r_a < \bar r \leqslant \overline{R}. \tag{15}$$

С помощью второго условия (10) выводится формальное выражение для неизвестного относительного расхода источника $\overline{Q}^0$

$$\overline{Q}^0 = \frac{\dfrac{\overline{R}\chi}{1-\beta} - \beta \displaystyle\int\limits_1^{\bar r_a} \frac{d\bar r}{\overline{k}_e^0(\bar r)} + \beta \bar r_a \ln \frac{\bar r_a}{\overline{R}}}{\displaystyle\int\limits_1^{\bar r_a} \frac{d\bar r}{\bar r \overline{k}_e^0(\bar r)} - \ln \frac{\bar r_a}{\overline{R}}}. \tag{16}$$

Для построения на базе (14)–(16) расчетных формул необходимо задаться функциями $\overline{k}_e^0(\bar r, \overline{Q}^0)$ и $\bar r_a(\overline{Q}^0)$. Вид относительного эквивалентного коэффициента фильтрации $\overline{k}_e$ заимствован из работы [9], а его начальное значение будет

$$\overline{k}_e^0 = \frac{\gamma^4 D^2 + (\beta + \gamma - \beta\gamma)^2}{\gamma^4 D^2 + (\beta + \gamma - \beta\gamma)^2 \overline{u}^0} \overline{u}^0. \tag{17}$$

С использованием (13) формула (17) примет окончательный вид

$$\overline{k}_e^0 = \frac{\phi_1}{\beta} \cdot \frac{\beta \bar r + \overline{Q}^0}{\bar r + \phi_2 \overline{Q}^0}, \tag{18}$$

где

$$\phi_1 = \beta \frac{\gamma^4 D^2 + (\beta + \gamma - \beta\gamma)^2}{\gamma^4 D^2 + \beta(\beta + \gamma - \beta\gamma)^2}, \qquad \phi_2 = \frac{(\beta + \gamma - \beta\gamma)^2}{\gamma^4 D^2 + \beta(\beta + \gamma - \beta\gamma)^2},$$

$$\gamma = \frac{m_c}{m_s}, \qquad D = \frac{d_s}{d_c}.$$

Положение внешней границы области деформаций определяется из условия $\overline{u}^0(\bar r_a^0) = 1$ и характеризуется радиусом

$$\bar r_a = \frac{\overline{Q}^0}{1-\beta}. \tag{19}$$

Подстановка выражений (18), (19) в (17) позволяет получить трансцендентное уравнение для $\overline{Q}^0$

$$\overline{Q}^0 \left[\left(\beta \frac{\phi_2}{\phi_1} - \frac{1}{1-\beta} \right) \ln \frac{\overline{Q}^0}{1-\beta} + \frac{\ln \overline{R}}{1-\beta} + \frac{\beta}{(1-\beta)\phi_1} \right] = \frac{\overline{R}\chi}{1-\beta} + \frac{\beta}{\phi_1}. \tag{20}$$

Для оценки важности кризиса сопротивления достаточно сопоставить расход $\overline{Q}^0$ с расходом источника в недеформированной среде, действующего в аналогичных условиях, $\overline{Q}_0$. Опираясь на (6), для $\overline{Q}_0$ легко найти

$$\overline{Q}_0 = \frac{\overline{R}\chi}{\ln \overline{R}}. \tag{21}$$

Как раз отношение $L = \overline{Q}^0 / \overline{Q}_0$ и удобно рассматривать как меру указанного эффекта.

Благодаря применению обобщенной формы закона Дарси (1) удается просто проанализировать значимость противодействия фильтрационному течению со стороны взвеси. Для этой цели в (4) полагается $k_{co} \to \infty$, что означает синхронное движение жидких и твердых частиц. Тогда коэффициент $\overline{k}_e^0$ (18) становится постоянным и равен

$$\overline{k}_e^0 = \overline{k}_{s0}^0 = \frac{\gamma^4 D^2 + (\beta + \gamma - \beta\gamma)^2}{(\beta + \gamma - \beta\gamma)^2}. \tag{22}$$

С учетом (19) выражение (13) трансформируется в уравнение относительно предельного значения расхода источника $\overline{Q}_\Pi^0$

$$\overline{Q}_\Pi^0 \left[\left(\frac{1}{\overline{k}_{s0}} - \frac{1}{1-\beta} \right) \ln \frac{\overline{Q}_\Pi^0}{1-\beta} + \frac{\ln \overline{R}}{1-\beta} + \frac{\beta}{(1-\beta)\overline{k}_{s0}} \right] = \frac{\overline{R}\chi}{1-\beta} + \frac{\beta}{\overline{k}_{s0}}. \tag{23}$$

Здесь $\overline{Q}_\Pi^0$ является для $\overline{Q}^0$ предельным в том смысле, что $\overline{Q}_\Pi^0$, во-первых, будет заведомо больше $\overline{Q}^0$, во-вторых, $\overline{Q}^0 \to \overline{Q}_\Pi^0$ при $\overline{k}_{c0} \to \infty$. Сравнение же $\overline{Q}_\Pi^0$ с $\overline{Q}^0$ или L с $L_\Pi = \overline{Q}_\Pi^0/\overline{Q}_0$ дает возможность измерять в относительных единицах (процентах) вклад в фильтрационный процесс сопротивления, оказываемого подвижными частицами потоку жидкости.

Уравнение (20) предназначено для определения расхода $\overline{Q}^0$ в обычных случаях, а именно, $r_a < R$, что эквивалентно условию

$$\overline{Q}^0 < (1-\beta)\overline{R}. \tag{24}$$

В исключительных ситуациях деформации охватывают всю область движения ($r_a \geqslant R$) и тогда следует решать только уравнение (8) при условиях (10). Таким образом, для $\overline{Q}^0$ была предложена следующая формула:

$$\overline{Q}^0 = \frac{\phi_1 \overline{R}\chi - \beta(1-\beta)(\overline{R}-1)}{\beta\phi_2(1-\beta)\ln \overline{R}}. \tag{25}$$

Несложно найти и граничные значения $\overline{R}_b$, $\overline{Q}_b^0$ параметров $\overline{R}$, $\overline{Q}^0$, при которых $\overline{r}_a$ сравнивается с $\overline{R}$. Для этого сначала из уравнения (20) после замены в нем $\overline{Q}^0$ на $(1-\beta)\overline{R}_b$ устанавливается $\overline{R}_b$, а затем и расход $\overline{Q}_b^0$, причем

$$\overline{Q}_b^0 = (1-\beta)\overline{R}_b.$$

Начальный скачок интенсивности источника определяется пятью комплексными параметрами — β, γ, D, χ, $\overline{R}$. Реальные пределы их изменения существенно отличаются. Так как содержание неструктурных частиц в природных средах, как правило, сравнительно небольшое, то $\beta, \gamma \ll 1$. Для количественного анализа, прежде всего, была выбрана типичная пара значений $\beta = 0{,}15$, $\gamma = 0,1$ (пример 1), что отвечает умеренно высокой концентрации указанных частиц в минеральных грунтах. Для контраста также брались значения $\beta = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}3$ (пример 2), характерные для сильнопористых сред, — к таким средам, например, относятся органические грунты (торфы). Диаметры d_s, d_c обычно различаются в несколько раз, реже — в десятки раз. При слишком больших значениях D пренебрегать взаимным влиянием частиц разного сорта недопустимо и тогда исходная модель нуждается в серьезной доработке. В примерах использовано единственное, часто встречающееся соотношение между d_s и d_c ($D = 5$), так как внимание акцентировалось на других модельных параметрах. Размеры области движения чаще всего многократно превосходят размеры и дрены,

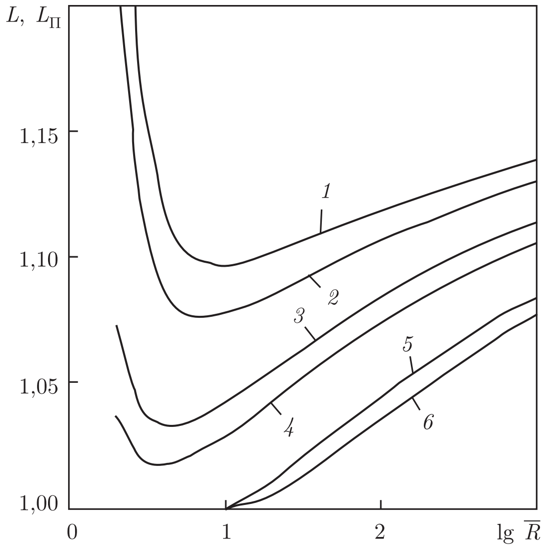

Рис. 1. Графики зависимостей $L(\lg\overline{R})$; $L_П(\lg\overline{R})$: *1, 3, 5* — $L_П$; *2, 4, 6* — L; *1, 2* — $\chi = 1$; *3, 4* — $\chi = 0{,}5$; *5, 6* — $\chi = 0{,}2$

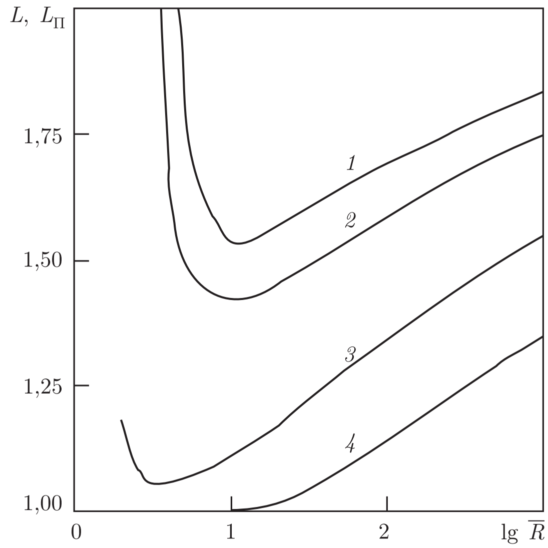

Рис. 2. Графики зависимостей $L(\lg\overline{R})$; $L_П(\lg\overline{R})$: *1* — $L_П$; *2–4* — L; *2* — $\overline{R} = 1000$; *1, 3* — $\overline{R} = 100$; *4* — $\overline{R} = 10$

и области деформаций, так что $\overline{R} \gg 1$. На практике деформации обычно локализованы вблизи дренажей. Как следствие, сверхкритические градиенты наблюдаются в малой части фильтрационного потока и $\chi \to 1$. Поэтому для $\overline{R}$ и χ выбраны интервалы [2, 1000], [0, 2] соответственно.

Предметом расчетов стал относительный расход источника в начале деформаций $\overline{Q}^0$, который обязательно сопоставлялся с аналогичным расходом в такой же, но недеформированной двухкомпонентной пористой среде. Отдельно исследовалось влияние радиуса $\overline{R}$ и отношения среднего и критического градиентов напора χ.

Данные вычислений приращения расхода $L = \overline{Q}^0/\overline{Q}_0$ как функции от $\overline{R}$ получены с использованием формулы (20) для значений $\chi = 0{,}2, 0{,}5, 1$ и представлены в случае минерального грунта на рис. 1, *а* органического — на рис. 2. Параллельно рассчитывались $\overline{Q}^0$, $L_П$ для предельной ситуации, когда взвесь и жидкость движутся синхронно. При минимальных размерах области движения скорость течения жидкости в порах вблизи дрены может быть значительной и мобилизация даже небольшого количества неструктурного вещества в состоянии резко улучшить фильтрационные условия, что и подтверждается характером кривых *1–6* на интервале $2 \leqslant R \leqslant 5$. Гипотетическое удаление контура разгрузки при неизменных χ, перепаде $H_d - H_R$ значит адекватное $\overline{R}$ уменьшение критического градиента напора и, следовательно, расширение области деформаций. Поток суффозионных частиц одновременно усиливается за счет вовлечения в деформации их большего объема и сокращается из-за уменьшения скорости транспортировки мобильной компоненты. Как видно из рис. 1, 2, превалирует как раз первый фактор, что и вызывает итоговое усиление работы источника с ростом $\overline{R}$. Упрощенная трактовка поведения дисперсной фазы как ассоциированной составляющей двухфазного течения способна приводить к заметным погрешностям, в чем убеждает относительное расположение на этих рисунках кривых $L(\overline{R})$ и $L_П(\overline{R})$.

Из областей определения функций $L(\overline{R})$, $L(\chi)$ выделены и рассматриваются только те множества значений $\overline{R}$, χ, для которых полученное выше решение имеет физический смысл.

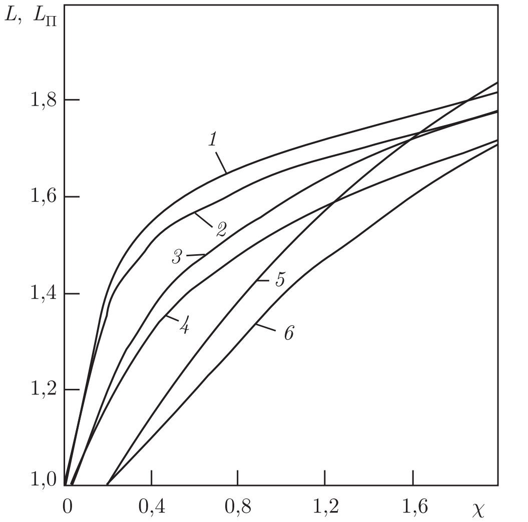

Рис. 3. Графики зависимостей $L(\chi)$; $L_\Pi(\chi)$: *1, 3, 5* — L_Π; *2, 4, 6* — L; 1, *2* — $\overline{R} = 1000$; *3, 4* — $\overline{R} = 100$; *5, 6* — $\overline{R} = 10$

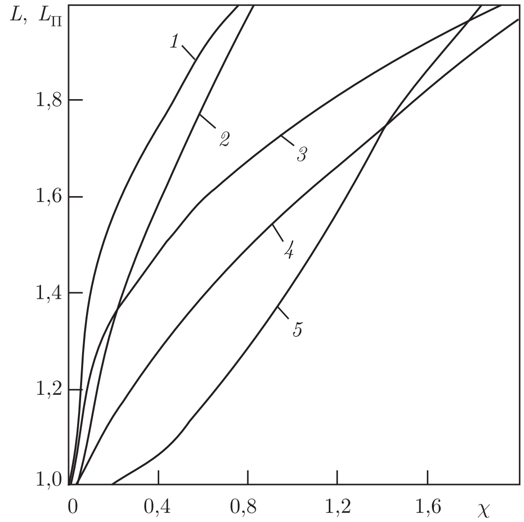

Рис. 4. Графики зависимостей $L(\chi)$; $L_\Pi(\chi)$: *1, 2* — L_Π; *3–5* — L; *1, 3* — $\overline{R} = 1000$; *2, 4* — $\overline{R} = 100$; *5* — $\overline{R} = 10$

Соответствующие ограничения на них вытекают из условия, соблюдение которого гарантирует отсутствие деформаций, а именно:

$$Q_0 \leqslant Q_k = 2\pi r_0(1 - m_s - m_c)u_k.$$

Это равнозначно

$$\chi \leqslant (1-\beta)\frac{\ln \overline{R}}{\overline{R}}. \qquad (26)$$

Фиксация размера области движения ($\overline{R}$ =10, 100 и 1000), граничных напоров при изменении параметра χ в выбранном диапазоне облегчает изучение чувствительности кризиса сопротивления по отношению к критическому градиенту (скорости u_k). Рассчитанные по (20), (23) кривые $L(\chi)$, $L_\Pi(\chi)$ изображены на рис. 3 (минеральный) и рис. 4 (органический грунт). Минимальные значения χ_m (среда деформируется при $\chi > \chi_m$) находились из (26). Естественно, что при $\chi = \chi_m$ будет $L = 1$. Попутно определялись и зависимости $L_\Pi(\chi)$, причем $L_\Pi(\chi_m)$ также равно 1. Наиболее быстрый рост L, L_Π отмечается при малых значениях χ.

В целом сравнение рис. 1 и 2, 3 и 4 позволяет утверждать, что эффект резкой интенсификации действия источника особенно сильно проявляется в суффозионных грунтах с высокой пористостью при большом содержании неструктурных частиц, хотя, безусловно, он представляет практический интерес и для обычных несвязных грунтов. Вообще же начальный скачок дренажного расхода вследствие увлажнения реальных несвязных пористых сред чаще составляет проценты, но в отдельных случаях может доходить до нескольких десятков процентов. Наконец, результаты выполненных расчетов говорят о целесообразности учета взаимодействия между образовавшейся в ходе деформаций взвесью и фильтрационным течением.

1. *Мурашко А. И., Сапожников Е. Г.* Защита дренажа от заиления. – Минск: Урожай, 1978. – 168 с.

2. *McDowell Z. M., Hunt J. R., Sitar N.* Particle transport through porous media // Wat. Resour. Res. – 1986. – **22**, No 13. – P. 1901. – 1921.
3. *Ojha C. S. P., Singh V. P., Adrian D. D.* Determination of critical head in soil piping // J. of Hydraulic Engineering, ASCE. – 2003. – **129**, No 7. – P. 511–518.
4. *Поляков В. Л.* Интенсивное промачивание суффозионных грунтов // Прикл. гідромеханіка. – 2007. – **9(81)**, № 3. – С. 70–79.
5. *Дмитриев А. Ф., Хлапук Н. Н., Дмитриев Д. А.* Деформационные процессы в несвязных грунтах в придренной зоне и их влияние на работу осушительно-увлажнительных систем. – Ровно: Изд-во РГТУ, 2002. – 145 с.
6. *Поляков В. Л.* Механическая суффозия в дренируемом грунте // Прикл. гідромеханіка. – 2002. – **4(76)**, № 4. – P. 60–73.
7. *Аэров М. Э., Тодес О. М., Наринский Д. А.* Аппараты со стационарным зернистым слоем. – Ленинград: Химия, 1979. – 176 с.
8. *Романков П. Г., Курочкина М. И.* Гидродинамические процессы химической технологии. – Ленинград: Химия, 1982. – 288 с.
9. *Поляков В. Л.* О фильтрационных деформациях грунта с образованием аккумулирующих зон // Прикл. гідромеханіка. – 2003. – **5(77)**, № 2. – P. 45–56.

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 31.01.2007

УДК 539.3:538.6:534.1

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга, В. В. Левченко**

Про тривимірну задачу лінеаризованої магнітострикції феритів з феромагнітним резонансом

The full system of three-dimensional equations of linearized magnetostriction for ferrites in view of a ferromagnetic resonance is transformed to a system of eight equations of the operational Hamilton type for rather definitely chosen initial variables.

Однією з актуальних задач електромагнітомеханіки, що мають важливе фундаментальне і прикладне значення, є дослідження магнітопружного деформування тіл із феримагнітних магнітострикційних матеріалів з урахуванням феромагнітного резонансу. Цьому питанню присвячені роботи [3–6, 8–15]. У даній роботі пропонується перетворення системи тривимірних диференціальних рівнянь лінеаризованої магнітострикції феритів кубічної системи з урахуванням феромагнітного резонансу фізико-механічних властивостей.

Визначальні рівняння лінеаризованої магнітострикції з урахуванням феромагнітного резонансу в околі статичного поля попереднього підмагнічування $\mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ для феритів кубічної системи можна записати у вигляді

$$\sigma_{11} = c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \qquad \sigma_{22} = c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{33} = c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \qquad \sigma_{32} = c_{55}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{\beta_2}{M_0}m_2,$$