



УДК 539.375

© 2008

В. Л. Богданов

## Напряженное состояние упругого тела с двумя соосными круговыми трещинами нормального отрыва при действии начальных напряжений

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

*An axisymmetric problem on the interaction of two parallel coaxial cracks of normal rupture in an infinite material with initial stresses acting along cracks is investigated with the use of approaches of the three-dimensional linearized mechanics of solids. Numerical results are obtained for a highly elastic material with the Bartenev–Khazanovich elastic potential. The dependence of the stress intensity factors on the initial stresses, physical-mechanical characteristics of the materials, and geometrical parameters of the problem is analyzed.*

В статье рассмотрена осесимметричная задача о взаимодействии двух соосных параллельных дискообразных трещин в бесконечном материале с начальными напряжениями, направленными параллельно плоскостям трещин. В соответствии с терминологией, принятой в [1, 2], указанная задача относится к неклассическим проблемам механики разрушения, поскольку ее нельзя адекватно описать в рамках классической линейной механики трещин. Это связано с тем, что из решения соответствующей задачи линейной теории упругости получаем, что составляющие нагрузки, направленные параллельно плоскостям трещин, не входят в выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и величин раскрытия трещин и, следовательно, не учитываются в классических критериях разрушения.

В [1, 3, 4] для исследования указанных классов задач был предложен подход в рамках трехмерной линеаризованной механики деформируемого твердого тела. При этом сформулированный в указанных работах критерий хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями является аналогом соответствующего критерия Гриффитса–Ирвина. Ранее с использованием указанного подхода решены отдельные классы задач, которые обнаружили новые механические эффекты, связанные с влиянием напряжений, действующих вдоль трещин [1, 5–8].

Задача исследована в общем виде для сжимаемых и несжимаемых высокоэластических материалов с различными формами упругих потенциалов и с помощью интеграль-

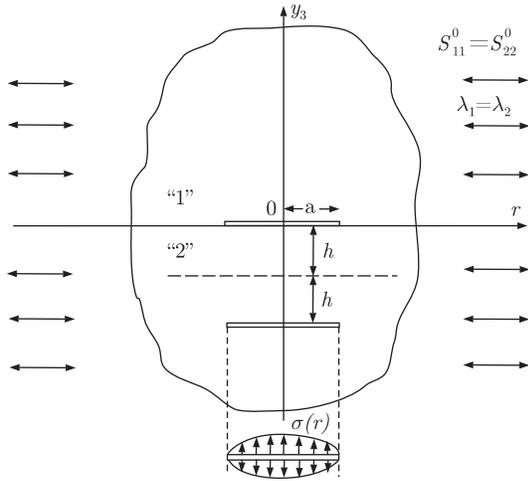


Рис. 1

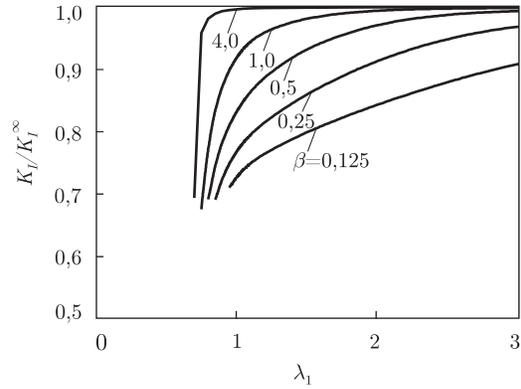


Рис. 2

ных преобразований Ханкеля сведена к системе парных интегральных уравнений, а затем к разрешающей системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Получены представления коэффициентов интенсивности напряжений. Для несжимаемых упругих материалов, описываемых потенциалом Бартенева–Хазановича, численно проанализирована зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от начальных напряжений, физико-механических характеристик материалов и геометрических параметров задачи.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим неограниченное пространство, содержащее две соосные трещины одинакового радиуса  $a$ , расположенные в параллельных плоскостях  $y_3 = 0$  и  $y_3 = -2h$  с центрами на оси  $Oy_3$  (рис. 1). Здесь применяются координаты начального деформируемого состояния, которые связаны с лагранжевыми координатами естественного (недеформированного) состояния соотношениями

$$y_j = \lambda_j x_j; \quad \lambda_j = \text{const} \quad (j = 1, 2, 3),$$

где  $\lambda_j$  — обусловленные начальными напряжениями коэффициенты удлинения (укорочения) вдоль координатных осей, определяющие перемещения в начальном состоянии.

Предполагаем, что в теле действуют одинаковые начальные напряжения вдоль осей  $Oy_1$ ,  $Oy_2$ , реализующие однородное начально-напряженно-деформированное состояние:

$$\begin{aligned} S_{33}^0 &= 0, & S_{11}^0 &= S_{22}^0 = \text{const} \neq 0, \\ \lambda_j &= \text{const}, & \lambda_1 &= \lambda_2 \neq \lambda_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $S_{ij}^0$  — компоненты симметричного тензора напряжений, отнесенные к единице площади тела в недеформированном (естественном) состоянии. Кроме того, будем использовать такие обозначения:  $Q'_{ij}$  — компоненты несимметричного тензора напряжений, отнесенные к единице площади тела в начальном (вызванном начальными напряжениями  $S_{ij}^0$ ) состоянии;  $u_j$  — компоненты соответствующего им вектора перемещений.

В [1] для случая однородного начального состояния (1) построены представления общих решений линеаризованных уравнений равновесия через гармонические потенциальные функции; при этом вид этих представлений зависит от корней характеристического уравнения. Так, в случае равных корней характеристического уравнения указанные представ-

ления в круговой цилиндрической системе координат  $(r, \theta, y_3)$ , получаемой из декартовой  $(y_1, y_2, y_3)$ , для осесимметричной задачи имеют вид

$$\begin{aligned} u_3 &= n_1^{-1/2}(m_1 - m_2 + 1)F - n_1^{-1/2}m_1\Phi - n_1^{-1/2}m_1z_1\frac{\partial F}{\partial z_1}; \\ u_r &= -\frac{\partial\varphi}{\partial r} - z_1\frac{\partial F}{\partial r}; \quad u_\theta = 0; \\ Q'_{33} &= C_{44}\left[(d_1l_1 - d_2l_2)\frac{\partial F}{\partial z_1} - d_1l_1\frac{\partial\Phi}{\partial z_1} - d_1l_1z_1\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}\right]; \\ Q'_{3r} &= C_{44}\left\{n_1^{-1/2}\frac{\partial}{\partial r}[(d_1 - d_2)F - d_1\Phi] - n_1^{-1/2}d_1z_1\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z_1}\right\}; \quad Q'_{3\theta} = 0; \quad \Phi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial z_1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Величины  $C_{44}$ ,  $n_i$ ,  $m_i$ ,  $l_i$ ,  $d_i$  ( $i = 1, 2$ ) определяются выбором модели материала [1], а функции  $\varphi$ ,  $F$ ,  $\Phi$  являются гармоническими.

В рассматриваемом случае двух параллельных соосных дискообразных трещин при двухосном равномерном нагружении вдоль плоскостей этих трещин имеет место симметрия геометрической и силовой схем задачи относительно плоскости  $y_3 = -h$ . Поэтому исходная задача для пространства с двумя трещинами может быть переформулирована к задаче для полупространства с одной трещиной. Рассматривая, для определенности, верхнее полупространство  $y_3 \geq -h$ , имеем следующие граничные условия на берегах трещины и на границе полупространства:

$$Q'_{33} = -\sigma(r), \quad Q'_{3r} = 0 \quad (y_3 = \pm 0, \quad 0 \leq r \leq a); \quad (3)$$

$$u_3 = 0, \quad Q'_{3r} = 0 \quad (y_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty). \quad (4)$$

Условно разобьем полупространство  $y_3 \geq -h$  на две подобласти: полупространство  $y_3 \geq 0$  и слой  $-h \leq y_3 \leq 0$ , обозначив соответствующие им величины индексами "1" и "2". На границе указанных областей вне трещины должны выполняться условия непрерывности перемещений и напряжений:

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)} \quad (y_3 = 0, \quad a < r < \infty); \quad (5)$$

$$Q'_{33}^{(1)} = Q'_{33}^{(2)}, \quad Q'_{3r}^{(1)} = Q'_{3r}^{(2)} \quad (y_3 = 0, \quad a < r < \infty). \quad (6)$$

Учитывая совместно граничные условия (3), (4) и условия непрерывности (5), (6), получаем формулировку граничных условий задачи в виде:

$$u_3^{(2)} = 0, \quad Q'_{3r}{}^{(2)} = 0 \quad (y_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty); \quad (7)$$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)} \quad (y_3 = 0, \quad a < r < \infty); \quad (8)$$

$$Q'_{33}{}^{(1)} = Q'_{33}{}^{(2)}, \quad Q'_{3r}{}^{(1)} = Q'_{3r}{}^{(2)} \quad (y_3 = 0, \quad 0 \leq r < \infty); \quad (9)$$

$$Q'_{33}{}^{(2)} = -\sigma(r), \quad Q'_{3r}{}^{(2)} = 0 \quad (y_3 = 0, \quad 0 \leq r \leq a). \quad (10)$$

**2. Парные интегральные уравнения. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода.** Выразим гармонические функции, фигурирующие в представлениях общих

решений (3), в каждой из областей “1” та “2” в виде интегральных разложений Ханкеля нулевого порядка по координате  $r$ :

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(r, z_1) &= - \int_0^{\infty} B(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}; & F^{(1)}(r, z_1) &= \int_0^{\infty} A(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_0(\lambda r) d\lambda; \\ \Phi^{(1)}(r, z_1) &= \int_0^{\infty} B(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_0(\lambda r) d\lambda; \\ \varphi^{(2)}(r, z_1) &= \int_0^{\infty} [D_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z_1 + h_1) + D_2(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(z_1 + h_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_1}; \\ F^{(2)}(r, z_1) &= \int_0^{\infty} [C_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(z_1 + h_1) + C_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z_1 + h_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\operatorname{sh} \lambda h_1},\end{aligned}\tag{11}$$

где  $h_1 = h n_1^{-1/2}$ .

Условия (7), (9), заданные на всей области  $y_3 = \operatorname{const}$ , позволяют выразить неизвестные функции  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C_1(\lambda)$ ,  $D_1(\lambda)$  через функции  $C_2(\lambda)$ ,  $D_2(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}A(\lambda) &= \frac{1}{k} [(\mu_1 - k_1) \operatorname{cth} \mu_1 + (\mu_1 - k_2)] C_2(\lambda) + \frac{1}{k} (1 + \operatorname{cth} \mu_1) D_2(\lambda); \\ C_1(\lambda) &= 0; & D_1(\lambda) &= \mu_1 C_2(\lambda); \\ B(\lambda) &= \frac{1}{k} [k_1(\mu_1 - k_2) \operatorname{cth} \mu_1 + k_2(\mu_1 - k_1)] C_2(\lambda) + \frac{1}{k} (k_1 + k_2 \operatorname{cth} \mu_1) D_2(\lambda),\end{aligned}\tag{12}$$

где  $k_1 = 1 - \frac{d_2 l_2}{d_1 l_1}$ ,  $k_2 = 1 - \frac{d_2}{d_1}$ ,  $k = k_1 - k_2 = \frac{d_2(l_1 - l_2)}{d_1 l_1}$ ,  $\mu_1 = \lambda h_1$ .

Из условий (8), (10) получаем систему парных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{2\mu_1}{k} + 1 \right) e^{-2\mu_1} \right] X_1 - \frac{2\mu_1}{k} e^{-2\mu_1} X_2 \right\} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda &= \frac{2\sigma(r)}{C_{44} d_1 l_1} \quad (r \leq a); \\ \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2\mu_1}{k} e^{-2\mu_1} X_1 - \left[ 1 + \left( \frac{2\mu_1}{k} - 1 \right) e^{-2\mu_1} \right] X_2 \right\} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda &= 0 \quad (r \leq a); \\ \int_0^{\infty} X_1 J_0(\lambda r) d\lambda &= 0 \quad (r > a), & \int_0^{\infty} X_2 J_1(\lambda r) d\lambda &= 0 \quad (r > a),\end{aligned}\tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}X_1 &\equiv [(\mu_1 - k_1) C_2(\lambda) + D_2(\lambda)] (1 + \operatorname{cth} \mu_1); \\ X_2 &\equiv [(\mu_1 - k_2) C_2(\lambda) + D_2(\lambda)] (1 + \operatorname{cth} \mu_1).\end{aligned}\tag{14}$$

Будем решать систему парных интегральных уравнений (13) методом подстановки [9]. В соответствии с ним, будем выбирать решение в виде, который позволяет тождественно удовлетворить два последних уравнения в (13), а именно:

$$X_1 = \int_0^a \varphi(t) \sin \lambda t dt; \quad X_2 = \sqrt{\frac{\pi \lambda}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \psi(t) J_{3/2}(\lambda t) dt, \quad (15)$$

где  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  — неизвестные функции, непрерывные вместе со своими первыми производными на интервале  $[0, a]$ .

Тогда, учитывая, что для  $r < a$ , выполняются соотношения

$$\int_0^\infty X_1(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = r^{-1} \frac{d}{dr} \int_0^r t \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}},$$

$$\int_0^\infty X_2(\lambda) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda = r^{-1} \frac{d}{dr} \int_0^r t \psi(t) \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}},$$

из первых двух уравнений (14) можем получить соотношения

$$\int_0^r t \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = -r \int_0^\infty \left( \frac{2\mu_1}{k} + 1 \right) e^{-2\mu_1} X_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda +$$

$$+ r \int_0^\infty \frac{2\mu_1}{k} e^{-2\mu_1} X_2(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda + \int_0^r \frac{2\rho\sigma(\rho)}{C_{44}d_1l_1} d\rho; \quad (16)$$

$$\int_0^r \frac{d}{dt} [t\psi(t)] \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = r \int_0^\infty \frac{2\mu_1}{k} e^{-2\mu_1} X_1(\lambda) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda -$$

$$- r \int_0^\infty \left( \frac{2\mu_1}{k} - 1 \right) e^{-2\mu_1} X_2(\lambda) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda.$$

Используя подстановку  $t = r \sin \theta$  и принимая во внимание, что уравнение Шлемилха вида  $\int_0^{\pi/2} f(r \sin \theta) d\theta = N(r)$ ,  $0 \leq r \leq a$  имеет решение [9]  $f(x) = \frac{2}{\pi} \left[ N(0) + x \int_0^{\pi/2} N'(x \sin \theta) d\theta \right]$ ,  $0 \leq x \leq a$ , из (16) получаем систему двух интегральных уравнения Фредгольма второго рода, которые в обезразмеренной форме имеют вид

$$f(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K_{11}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 g(\eta) K_{12}(\xi, \eta) d\eta = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\xi \sin \theta}{C_{44}d_1l_1} t(\xi \sin \theta) d\theta; \quad (17)$$

$$g(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K_{21}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 g(\eta) K_{22}(\xi, \eta) d\eta = 0,$$

где  $f(\xi) \equiv a^{-1} \varphi(a\xi)$ ,  $g(\xi) \equiv a^{-1} \frac{d}{d\xi} [\xi \psi(a\xi)]$ ,  $t(\xi) \equiv \sigma(a\xi)$ .

Ядра интегральных уравнений (17) имеют вид

$$\begin{aligned} K_{11}(\xi, \eta) &= I_1(2\beta_1, \eta) - \frac{2\beta_1}{k} I_2(2\beta_1, \eta); \\ K_{12}(\xi, \eta) &= \frac{2\beta_1}{k} \left[ I_1(2\beta_1, 1) - \frac{1}{\eta} I_1(2\beta_1, \eta) \right]; \quad K_{21}(\xi, \eta) = -\frac{2\beta_1}{k} \xi I_3(2\beta_1, \eta); \\ K_{22}(\xi, \eta) &= \xi \left\{ \left[ I_1(2\beta_1, 1) - \frac{1}{\eta} I_1(2\beta_1, \eta) \right] - \frac{2\beta_1}{k} \left[ I_2(2\beta_1, 1) - \frac{1}{\eta} I_2(2\beta_1, \eta) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\beta, \eta) &= \frac{\beta}{2\xi\eta(\zeta^2 - 1)}; \quad I_2(\beta, \eta) = I_1(\beta, \eta) \left[ 4\zeta I_1(\beta, \eta) - \frac{1}{\beta} \right]; \\ I_3(\beta, \eta) &= 4I_1^2(\beta, \eta) \left[ 2(3\zeta^2 + 1)I_1(\beta, \eta) - \frac{3\zeta}{\beta} \right], \quad \zeta = \frac{\beta^2 + \xi^2 + \eta^2}{2\xi\eta}, \\ \beta &= ha^{-1}, \quad \beta_1 = \beta n_1^{-1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, решая интегральные уравнения Фредгольма второго рода (17) и используя соотношения (15), (14), (12) и (11), из представлений (2) можем получить распределение напряжений и перемещений в материале.

**3. Коэффициенты интенсивности напряжений.** Используя соотношения (2), (11), (14) и (15), получим выражения для компонент тензора напряжений в плоскости трещины:

$$\begin{aligned} Q'_{33}{}^{(2)}(r, 0) &= -\frac{1}{2} C_{44} d_1 l_1 \left[ \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty \sin \lambda t J_0(\lambda r) \lambda d\lambda + \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty \left( \frac{2\mu_1}{k} + 1 \right) e^{-2\mu_1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \lambda t J_0(\lambda r) \lambda d\lambda + \int_0^a \frac{d}{dt} (t\psi(t)) dt \int_0^\infty \frac{2\mu_1}{k} e^{-2\mu_1} (a^{-1} \sin \lambda a - t^{-1} \sin \lambda t) J_0(\lambda r) d\lambda \right]; \\ Q'_{3r}{}^{(2)}(r, 0) &= \frac{1}{2} C_{44} d_1 n_1^{-1/2} \left[ \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \psi(t) dt \int_0^\infty \sin \lambda t J_{3/2}(\lambda t) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \psi(t) dt \int_0^\infty \left( \frac{2\mu_1}{k} - 1 \right) e^{-2\mu_1} J_{3/2}(\lambda t) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty \frac{2\mu_1}{k} e^{-2\mu_1} \sin \lambda t J_1(\lambda r) \lambda d\lambda; \quad Q'_{3\theta}{}^{(2)} = 0. \right. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично классическому случаю [10]; будем определять коэффициенты интенсивности напряжений как коэффициенты при особенностях в компонентах напряжений возле края трещины:

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r-a)]^{1/2} Q'_{33}(r, 0), \quad K_I = \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r-a)]^{1/2} Q'_{3r}(r, 0), \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r-a)]^{1/2} Q'_{3\theta}(r, 0). \end{aligned} \quad (20)$$

Из анализа выражений (19) следует, что при  $r \rightarrow +a$

$$\begin{aligned} Q_{33}^{\prime(2)}(r, 0) &\sim \frac{1}{2} C_{44} d_1 l_1 \frac{\varphi(a)}{\sqrt{r^2 - a^2}}; \\ Q_{3r}^{\prime(2)}(r, 0) &\sim -\frac{1}{2} C_{44} d_1 n_1^{-1/2} \frac{a\psi(a)}{r\sqrt{r^2 - a^2}}, \end{aligned} \quad (21)$$

т. е. порядок особенности в распределении напряжений возле края трещины нормального отрыва в теле с начальными напряжениями совпадает с порядком особенности, полученным при исследовании аналогичной задачи в линейной механике хрупкого разрушения [10].

Тогда из (20) получаем

$$K_I = \frac{1}{2} C_{44} d_1 l_1 \sqrt{\frac{\pi}{a}} \varphi(a), \quad K_{II} = \frac{1}{2} C_{44} d_1 n_1^{-1/2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \psi(a), \quad K_{III} = 0. \quad (22)$$

Переходя в (22) к безразмерным переменным и функциям, находим

$$K_I = \frac{1}{2} C_{44} d_1 l_1 \sqrt{\pi a} f(1), \quad K_{II} = -\frac{1}{2} C_{44} d_1 n_1^{-1/2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 g(\eta) d\eta, \quad K_{III} = 0, \quad (23)$$

где функции  $f$  и  $g$  определяются из (17).

Из соотношений (23) видим, что взаимовлияние параллельных трещин приводит к тому, что для случая трещины нормального отрыва коэффициент интенсивности напряжений  $K_{II}$  отличен от нуля (для одной изолированной трещины в пространстве  $K_{II} = 0$  [1]). Кроме того, оба коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$  зависят от начальных напряжений  $S_{11}^0 = S_{22}^0$  (или удлинений  $\lambda_1 = \lambda_2$ ), а также от расстояния между трещинами  $2h$  (или  $2\beta$ ), поскольку решения  $f(\xi)$  и  $g(\xi)$  уравнений (17) зависят от этих параметров.

Рассмотрим предельный случай расположения трещин, когда расстояние между ними стремится к бесконечности. Из выражений для ядер интегральных уравнений (18) следует, что при  $\beta \rightarrow \infty$  все ядра в пределе обращаются в нуль.

Тогда из уравнений (17) имеем граничные значения для функций и  $g$ :

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} f(\xi) \equiv f^\infty(\xi) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\xi \sin \theta}{C_{44} d_1 l_1} t(\xi \sin \theta) d\theta, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} g(\xi) \equiv g^\infty(\xi) = 0. \quad (24)$$

Подставляя соотношения (24) в представления (22), (23), получаем следующие значения коэффициентов интенсивности напряжений для предельного случая расположения трещин при  $\beta \rightarrow \infty$ :

$$K_I^\infty = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^1 \eta t(\eta) \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a t\sigma(t) \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}; \quad K_{II}^\infty = 0, \quad K_{III}^\infty = 0, \quad (25)$$

которые полностью совпадают (при принятых обозначениях) со значениями коэффициентов интенсивности напряжений, полученными в задаче об изолированной трещине нормального

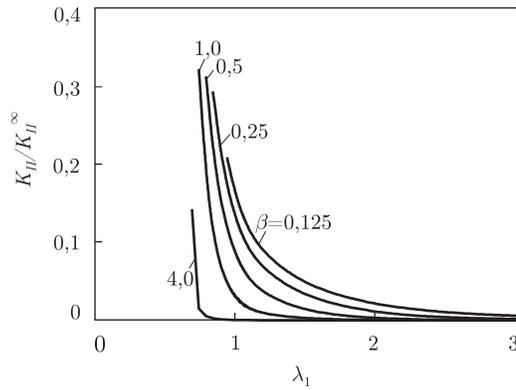


Рис. 3

отрыва в бесконечном материале с начальными напряжениями [1] и без начальных напряжений [10]. В частности, для случая равномерного растягивающего нагружения на берегах трещины  $\sigma(r) = \sigma = \text{const}$  из (25) получаем

$$K_I^\infty = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}; \quad K_{II}^\infty = 0; \quad K_{III}^\infty = 0. \quad (26)$$

**4. Пример численного исследования.** Для численного исследования интегральных уравнений Фредгольма второго рода (17) используется метод Бубнова–Галеркина с выбором в качестве системы координатных функций системы степенных функций. Численное интегрирование осуществляется по квадратурным формулам Гаусса. Предполагается, что на берегах трещин действует равномерная нормальная нагрузка в виде  $\sigma(r) = \sigma_0 = \text{const}$ .

Рассмотрим в качестве примера высокоэластический несжимаемый материал с потенциалом Бартенева–Хазановича [11]. Параметры, входящие в (2), для этого материала приведены в [8]. На рис. 2 для задачи о материале с начальными напряжениями в виде (1) приведена зависимость соотношений коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I/K_I^\infty$  (где  $K_I^\infty$  — коэффициент интенсивности напряжений для изолированной трещины в бесконечном материале, определяемый по формуле (26)) от значений параметра начального укорочения (удлинения)  $\lambda_1$ , обусловленного действием начальных напряжений сжатия — растяжения  $S_{11}^0$  ( $\lambda_1 < 1$  — начальное сжатие,  $\lambda_1 > 1$  — начальное растяжение), для различных значений безразмерного полурасстояния между трещинами  $\beta = ha^{-1}$ . Как видим, начальные напряжения оказывают значительное влияние на коэффициенты интенсивности напряжений. На рис. 3 дана зависимость соотношений  $-K_{II}/K_I^\infty$  от значений  $\lambda_1$ . Как видим из этих рисунков, наблюдается асимптотическое поведение значений  $K_I/K_I^\infty$  и  $-K_{II}/K_I^\infty$  при стремлении параметра укорочения  $\lambda_1 < 1$  к значениям, соответствующим симметричной форме потери устойчивости материала с двумя параллельными соосными трещинами при сжатии вдоль трещин (см. [12]).

Рис. 4, а, б иллюстрируют, соответственно, зависимости соотношений  $K_I/K_I^\infty$  и  $-K_{II}/K_I^\infty$  от безразмерного полурасстояния между трещинами  $\beta$  для разных значений  $\lambda_1$ . Из рисунков видим, что при возрастании расстояния между трещинами значения коэффициентов интенсивности напряжений для двух соосных трещин нормального отрыва стремятся к значениям, полученным в задаче об изолированной трещине в бесконечном материале. Отметим также, что аналогично результатам, полученным в задаче о двух соосных трещинах в бесконечном теле в рамках линейной механики разрушения [9], взаимовлияние трещин

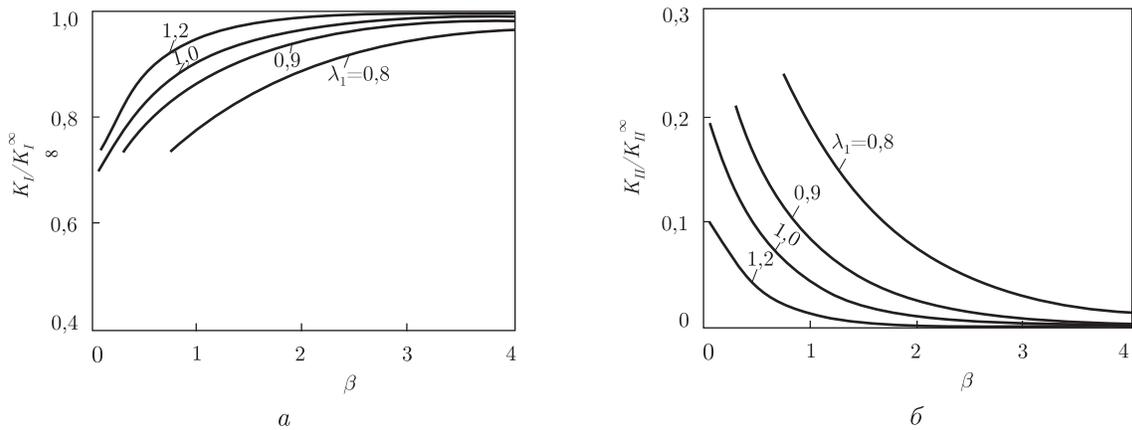


Рис. 4

в линеаризованной задаче приводит к снижению (особенно существенному для малых значений  $\beta$ ) значений  $K_I$  по сравнению с  $K_I^\infty$ , получаемым для изолированной трещины.

1. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4-х т., 5-ти кн. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 2).
2. Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4-х т., 5-ти кн. / (Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 4, Кн. 1).
3. Гузь А. Н. К линеаризованной теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями // ДАН СССР. – 1980. – **252**, № 5. – С. 1085–1088.
4. Guz A. N. On the development of brittle-fracture mechanics of materials with initial stress // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, No 4. – P. 316–323.
5. Guz A. N., Dyshel' M. Sh., Nazarenko V. M. Fracture and stability of materials and structural members with cracks: Approaches and results // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No 12. – P. 1323–1359.
6. Guz A. N., Nazarenko V. M., Bogdanov V. L. Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // Theor. and Appl. Fracture Mech. – 2007. – **48**. – P. 285–303.
7. Nazarenko V. M., Bogdanov V. L., Altenbach H. Influence of initial stress on fracture of a halfspace containing a penny-shaped crack under radial shear // Int. J. Frac. – 2000. – **104**. – P. 275–289.
8. Богданов В. Л. О разрушении материала с периодической системой соосных круговых трещин при действии направленных вдоль них начальных напряжений // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 54–60.
9. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
10. Kassir M. K., Sih G. C. Mechanics of fracture. Three dimensional crack problems. – Leyden: Noordhoff, 1975. – Vol. 2. – 452 p.
11. Бартенев Г. М., Хазанович Т. Н. О законе высокоэластических деформаций сеточных полимеров // Высокомогл. соединения. – 1960. – **2**, № 1. – С. 21–28.
12. Guz A. N., Knukh V. I., Nazarenko V. M. Compressive failure of materials with two parallel cracks: small and large deformation // Theor. and Appl. Fracture Mech. – 1989. – **11**. – P. 213–223.

Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев

Надійшло до редакції 11.06.2008