УДК 539.3

В. М. Рибка

Аспекти векторної задачі спряження на прикладі контактної задачі теорії пружності

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. С. Гудрамовичем)

The vector conjugation problem for boundary values of piecewise holomorphic functions is solved without reducing it to separate scalar conjugation problems (in case of difficulty to do it), by applying the solutions of problems with fewer number of singular points.

1. Розглянемо пружну півплощину $y \leqslant 0$, до границі L $(y = 0)$ якої на ділянці $L_1 = (a_1, a_2)$ притиснемо без повороту штамп з плоскою підошвою при відсутності тертя з півплощиною, а на ділянці $L_2 = (a_3, a_4)$ — штамп з плоскою підошвою при абсолютному зчепленні його з півплощиною. Поза штампами границя півплощини вільна від напружень. Задано головні вектори зовнішніх зусиль $(0, Y_1)$ на L_1 і $(0, Y_2)$ на L_2, що відповідають реалізації граничних умов.

Штампи взято з плоскою підошвою, щоб ділянки контакту були відомі заздалегідь; тоді при відсутності повороту штампів задача спряження буде однорідною. Розв'язання саме однорідної задачі є основною складністю.

2. Для розв'язання цієї контактної задачі скористаємося формулами для півплощини $y \leqslant 0$, що подають напруження та похідні переміщень через кусково-голоморфну комплексної змінної $z = x + iy$ функцію $\Phi(z)$, визначену як у нижній, так і у верхній півплощині, та кусково-голоморфну функцію $\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}$ [1, с. 406]. Риска над символом означає комплексне спряження. Крайові умови контакту без тертя ($v'^{-} = 0$, $X_y^{-} = 0$ на L_1), умови абсолютного зчеплення ($v'^{-} = 0$, $u'^{-} = 0$ на L_2) і умови відсутності напружень на границі L поза штампами, користуючись формулами для крайових значень [2], природно записати у векторно-матричному вигляді [2, 3]

$$F^{+}(t) = G(t)F^{-}(t) \qquad \text{на} \qquad L \qquad (F(z) = (\Phi(z)\overline{\Phi}(z))^{T}), \tag{1}$$

де $G(t)$ набуває значення

$$\begin{aligned} &G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{на} \quad L_1, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} -\kappa & 0 \\ 0 & -\kappa^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{на} \quad L_2, \\ &G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{на} \quad L \quad \text{поза} \quad L_1 \bigcup L_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут індекс T позначає транспонування матриці, $\kappa = (\lambda + 3\mu)(\lambda + \mu)$; λ, μ — коефіцієнти Ламе. При великих $|z|$ $\Phi(z) = -i(Y_1 + Y_2)2\pi z + o(1/z)$ [1]. Умови (1) є умовами векторної задачі спряження. Ряд задач такого типу отримав ефективний аналітичний розв'язок завдяки зведенню векторної задачі до окремих скалярних задач [1—3]. В даному разі цей прийом не підходить, оскільки матриці G_1, G_2 і G_3 не є сумісно діагоналізовними [4]. З іншого боку, наша контактна задача для півплощини може бути зведена в комплексній площині до однорідного диференціального рівняння другого порядку з особливими точками [5], тобто до рівняння вигляду

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0, \tag{3}$$

де w' та w'' — похідні шуканої функції за комплексною змінною z.

Це може бути диференціальне рівняння класу Фукса, що дозволяє для розв'язання задач механіки застосовувати аналітичну теорію диференціальних рівнянь [6]. Однак, починаючи з чотирьох особливих точок, таке рівняння містить у собі заздалегідь невідомі акцесорні параметри, що спричиняє істотні труднощі [7]. Зауважимо, що не саме кількість особливих точок, починаючи з чотирьох, є перешкодою, оскільки відомо, як побудувати розв'язок скалярної задачі спряження з довільним числом ділянок спряження [1].

В загальному випадку, для інтегралів рівняння (3) особлива точка є точкою розгалуження. Нехай $w_1(z)$ і $w_2(z)$ — будь-які два лінійно незалежні інтеграли рівняння (3). Після повного обходу особливої точки $z = z_0$ в додатному напрямку вони перетворяться на інтеграли, які позначимо $\widetilde{w}_1(z)$ і $\widetilde{w}_2(z)$. Оскільки будь-який інтеграл рівняння (3) лінійно виражається через два частинні лінійно незалежні інтеграли, то

$$\begin{pmatrix} \widetilde{w}_1 \\ \widetilde{w}_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

де G — деяка матриця з постійними елементами.

Поглянемо на умови спряження (1), (2) як на такі, що характеризують обходи особливих точок. Оскільки при $x > a_4$ для $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ має місце голоморфність, то матриця G_2, що задана на (a_3, a_4), характеризує обхід функціями $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ точки a_4 в додатному напрямку. В даному випадку ця матриця діагональна. Отже, функції $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ в околі точки a_4 канонічні, причому коренями матриці G_2 є власні значення $\lambda_1^{(4)} = -\kappa$ та $\lambda_2^{(4)} = -\kappa^{-1}$.

Оскільки на (a_2, a_3) для $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ має місце голоморфність, то обхід функціями $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ точки a_3 в додатному напрямку характеризують граничні умови на (a_3, a_4), якщо їх подати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \Phi^-(t) \\ \overline{\Phi}^-(t) \end{pmatrix} = G_2^{-1} \begin{pmatrix} \Phi^+(t) \\ \overline{\Phi}^+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa^{-1} & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^+(t) \\ \overline{\Phi}^+(t) \end{pmatrix}.$$

Відповідні власні значення матриці G_2^{-1} є $\lambda_1^{(3)} = -\kappa^{-1}$ та $\lambda_2^{(3)} = -\kappa$.

Обхід функціями $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ точки a_2 в додатному напрямку характеризують граничні умови на (a_1, a_2), оскільки на (a_2, a_3) для $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ має місце голоморфність, якщо їх подати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \Phi^+(t) \\ \overline{\Phi}^+(t) \end{pmatrix} = G_1 \begin{pmatrix} \Phi^-(t) \\ \overline{\Phi}^-(t) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Функції $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ в околі точки a_2 не є канонічними, оскільки матриця G_1 (2) не є діагональною (по головній діагоналі).

Зведемо до канонічного вигляду лінійне перетворення (4). Для цього перейдемо від функцій $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ до нових функцій $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$ заміною

$$\begin{pmatrix} \Phi(z) \\ \overline{\Phi}(z) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \Psi_1(z) \\ \Psi_2(z) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Підберемо S так, щоб значення $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$ після одного повного обходу в додатному напрямку точки a_2 (тобто $\widetilde{\Psi}_1(z)$, $\widetilde{\Psi}_2(z)$) були пов'язані з їх значеннями до обходу діагональною матрицею. Користуючись (5), з (4) маємо

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\Psi}_1(z)\\ \widetilde{\Psi}_2(z)\end{pmatrix} = S^{-1}G_1S\begin{pmatrix}\Psi_1(z)\\ \Psi_2(z)\end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо спочатку задачу на власні значення $(G_1-\lambda E)r=0$, де E — одинична матриця; r — власний вектор матриці G_1.

Якщо корені λ_1, λ_2 характеристичного рівняння $\det(G_1-\lambda E)=0$ є різними і за стовпці матриці S взято власні вектори матриці G_1, то матриця $S^{-1}G_1S$ буде діагональною [8]. Отже, тоді перетворення (5) пов'язуватиме неканонічні функції $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ в околі точки a_2 з канонічними в цьому околі функціями $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$. Для матриці G_1 (2) обчислення дають

$$\lambda_1^{(2)}=1,\qquad \lambda_2^{(2)}=-1,\qquad S=\begin{pmatrix}1 & -0{,}5\\ 1 & +0{,}5\end{pmatrix},\qquad S^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ -1 & 1\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Нарешті розглянемо точку a_1. Оскільки при $x<a_1$ $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ голоморфні, то обхід функціями $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ точки a_1 в додатному напрямку характеризують граничні умови на (a_1,a_2), якщо їх подати у вигляді

$$\begin{pmatrix}\Phi^-(t)\\ \overline{\Phi}^-(t)\end{pmatrix} = G_1^{-1}\begin{pmatrix}\Phi^+(t)\\ \overline{\Phi}^+(t)\end{pmatrix}.$$

Тут $G_1^{-1}\equiv G_1$, отже, перетворення (5), яке приводить до канонічних в околі a_1 функцій $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$, здійснюється тією ж матрицею S (6), що і для a_2.

Рівняння (3) у випадку, коли корені характеристичного рівняння є різними, в околі особливої точки $z=z_0$ має канонічні інтеграли [6]

$$\Psi_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}f_1(z),\qquad \Psi_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}f_2(z), \tag{7}$$

де $\rho_1=\ln\lambda_1/2\pi i$, $\rho_2=\ln\lambda_2/2\pi i$ — показники обходу; λ_1, λ_2 — власні значення; регулярні функції $f_1(z)$, $f_2(z)$ при обході особливої точки $z=z_0$ залишаються однозначними, отже, в околі цієї точки можуть бути розкладені в ряд Лорана. Показники степеня ρ_1, ρ_2, завдяки властивості логарифмічної функції, визначаються з точністю до доданків, які є цілими числами. Це узгоджується з формулами (7), оскільки, помножуючи ряд Лорана на $(z-z_0)^m$, де m — будь-яке ціле число, знову отримаємо ряд Лорана.

Обмежимося випадком, коли функції $f_1(z)$, $f_2(z)$ мають полюс. Тоді, помножуючи ряд Лорана на $(z-z_0)^m$, де m — підходяще ціле число, можна досягти, щоб у формулах (7) $f_1(z)$, $f_2(z)$ в околі точки $z=z_0$ були голоморфні та відрізнялися від нуля при $z=z_0$, отже, розкладалися в ряд Тейлора.

Більш того, в теорії пружності показники степеня ρ_1, ρ_2 мають задовольняти певні фізичні умови (наприклад, умову інтегрованості напружень).

Випадок одного зчепленого штампа на L_2, якщо через $\Phi_2(z)$ позначити функцію Мусхелішвілі, зводиться до скалярної задачі спряження $\Phi_2^+=-\kappa\Phi_2^-$ (див. (1), (2)). Тут маємо

$$\begin{aligned}X_{02}(z)&=(z-a_3)^{-\frac{1}{2}+i\frac{\ln\kappa}{2\pi}}(z-a_4)^{-\frac{1}{2}-i\frac{\ln\kappa}{2\pi}},\\ \Phi_2(z)&=-\frac{iY_2}{2\pi}(z-a_3)^{-\frac{1}{2}+i\frac{\ln\kappa}{2\pi}}(z-a_4)^{-\frac{1}{2}-i\frac{\ln\kappa}{2\pi}},\end{aligned} \tag{8}$$

Таблиця 1. Особливі точки a_i, власні значення $\lambda_1^{(i)}$, $\lambda_2^{(i)}$, показники обходу $\rho_1^{(i)}$, $\rho_2^{(i)}$

a_1		a_2	
$\lambda_1^{(1)} = 1$	$\lambda_2^{(1)} = -1$	$\lambda_1^{(2)} = 1$	$\lambda_2^{(2)} = -1$
$\rho_1^{(1)} = 0$	$\rho_2^{(1)} = \dfrac{-1}{2}$	$\rho_1^{(2)} = 0$	$\rho_2^{(2)} = \dfrac{-1}{2}$
a_3		a_4	
$\lambda_1^{(3)} = \dfrac{-1}{\kappa}$	$\lambda_2^{(3)} = -\kappa$	$\lambda_1^{(4)} = -\kappa$	$\lambda_2^{(4)} = \dfrac{-1}{\kappa}$
$\rho_1^{(3)} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\ln\kappa}{2\pi}$	$\rho_2^{(3)} = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\ln\kappa}{2\pi}$	$\rho_1^{(4)} = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\ln\kappa}{2\pi}$	$\rho_2^{(4)} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\ln\kappa}{2\pi}$

де $X_{02}(z)$ — частинний розв'язок [1]. Показник степеня при $(z-a_4)$ відповідає, з позиції векторної задачі спряження з матрицею G_2, обходу точки a_4, причому отримано його на основі першого власного значення $\lambda_1^{(4)} = -\kappa$, а багатозначність $\rho_1^{(4)} = \ln\lambda_1^{(4)}/(2\pi i)$, зумовлену логарифмуванням, вилучено вимогою інтегрованості особливості для напружень. Аналогічно показник степеня при $(z-a_3)$ відповідає обходу точки a_3 з матрицею G_2^{-1}; отримано його на основі першого власного значення $\lambda_1^{(3)} = -1/\kappa$.

Застосовуючи комплексне спряження до попередньої умови, одержуємо $\overline{\Phi}_2^+ = -1/\kappa\overline{\Phi}_2^-$ на L_2. Останній умові відповідають другі власні значення $\lambda_2^{(4)} = -1/\kappa$ та $\lambda_2^{(3)} = -\kappa$, за якими обчислено показники обходу $\rho_2^{(4)}$ та $\rho_2^{(3)}$.

Випадок одного гладкого штампа на L_1, якщо через $\Phi_1(z)$ позначити функцію Мусхелішвілі, зводиться до векторної задачі спряження (див. (1), (2))

$$\begin{pmatrix}\Phi_1^+(t)\\ \overline{\Phi}_1^+(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1^-(t)\\ \overline{\Phi}_1^-(t)\end{pmatrix},$$

яка зводиться до скалярних задач спряження, звідки можна отримати [1] $\Phi_1^+(t) = -\Phi_1^-(t)$ на L_1. Тут маємо

$$X_{01}(z) = (z-a_1)^{-1/2}(z-a_2)^{-1/2}, \qquad \Phi_1(z) = -\frac{iY_1}{2\pi}(z-a_1)^{-1/2}(z-a_2)^{-1/2}, \tag{9}$$

де $X_{01}(z)$ — частинний розв'язок [1]. Показник степеня при $(z-a_2)$ відповідає, з позиції векторної задачі лінійного спряження, обходу точки a_2 з матрицею G_1, причому отримано його на основі власного значення $\lambda_2^{(2)} = -1$ (див. (6)). Аналогічно показник степеня при $(z-a_1)$ відповідає обходу точки a_1 з матрицею $G_1^{-1} \equiv G_1$; отримано його на основі власного значення $\lambda_2^{(1)} = -1$.

Зважаючи на вищесказане і на те, що векторна задача спряження (1), (2) не зводиться лінійним перетворенням до окремих скалярних задач, безпосередньо побудуємо розв'язок векторної задачі. В табл. 1 особливим точкам a_i відповідають власні значення $\lambda_1^{(i)}$, $\lambda_2^{(i)}$ підстановок обходу та вибрані з урахуванням фізичних умов показники обходу $\rho_1^{(i)}$, $\rho_2^{(i)}$ для канонічних інтегралів (функцій). Показники $\rho_1^{(1)} = \rho_1^{(2)} = 0$ не є такими, що характеризують багатозначність функцій.

Скалярна однорідна задача спряження при n окремих ділянках спряження має загальний розв'язок $P(z)\prod\limits_{i=1}^{n} X_{0i}(z)$, де $P(z)$ — поліном [1].

У нашому випадку незведення векторної задачі спряження до окремих скалярних, зважаючи на аналітичні властивості частинних розв'язків $X_{01}(z)$ (9) і $X_{02}(z)$ (8) окремих задач, за частинний розв'язок задачі в цілому можна взяти лінійну комбінацію $\alpha_1 X_{01}(z)+\alpha_2 X_{02}(z)$. Останнє дозволяє одержати функцію Мусхелішвілі сформульованої в цій роботі задачі про два штампи з різнотипними граничними умовами для них у вигляді

$$\Phi(z) = -\frac{iY_1}{2\pi}(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{iY_2}{2\pi}(z-a_3)^{-\frac{1}{2}+i\frac{\ln\kappa}{2\pi}}(z-a_4)^{-\frac{1}{2}-i\frac{\ln\kappa}{2\pi}}.$$

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
2. *Рыбка В. М., Ковура А. Б.* Контакт штампа с упругой полуплоскостью при нормальной и касательной пригрузке // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2000. – **2**, вип. 3. – С. 88–97.
3. *Моссаковский В. И., Рыбка В. М.* Задача о вдавливании выпуклого штампа в упругую полуплоскость при нормальной и касательной пригрузке // Там само. – 2003. – **2**, вип. 7. – С. 137–144.
4. *Рибка В. М.* Про діагоналізацію і одночасну діагоналізацію матриць // Доп. НАН України. – 1999. – № 11. – С. 40–42.
5. *Моссаковский В. И., Рыбка В. М., Смирнов С. А.* Контактные задачи теории упругости для полуплоскости как задачи для линейного дифференциального уравнения в комплексной области // Системні технології. Регіон. міжвуз. зб. наук. праць. – 2004. – Вип. 3(32). – Дніпропетровськ: Системні технології. – С. 32–37.
6. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – Москва; Ленинград: Гостехтеориздат, 1941. – 400 с.
7. *Моссаковский В. И., Бискуп А. Г.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Докл. АН СССР. – 1972. – **206**, № 5. – С. 1068–1070.
8. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения. – Москва: Мир, 1980. – 456 с.

Дніпропетровський національний університет

Надійшло до редакції 18.02.2008

УДК 539.538

М. В. Чернець

Метод розрахунку довговічності черв'ячної передачі з архімедовим черв'яком

(Представлено членом-кореспондентом НАН України О. Є. Андрейківим)

On the basis of the well-known mathematical model of materials wear under sliding friction, a method to study the wear kinetics of Archimedean worm gears and to calculate their resource is developed. A numerical solution of the problem is given.

Черв'ячні передачі з архімедовим черв'яком є досить поширеними у сучасному машинобудуванні. Між витками черв'яка і зубами черв'ячного колеса виникає тертя ковзання, яке призводить до їх зношування. На даний час відсутні методи розрахунку довговічності черв'ячних передач. В даній роботі на основі узагальненої методології дослідження кінетики зношування трибосистем ковзання [1] та методу розрахунку зношування зубів циліндричних передач [2] розроблено новий метод оцінки ресурсу черв'ячних передач вказаного виду.