



УДК 519.6

© 2008

Академик НАН України В. С. Дейнека, М. В. Белоус

О численном моделировании пространственного деформирования среды с сосредоточенной массой и расклинивающим давлением на пересекающихся включениях

A problem of modeling of the dynamic equilibrium of a medium with a localized mass and a disjoining pressure on thin intersecting inclusions is considered. The discontinuous FEM function classes are used to find the approximate generalized solution. Error estimates of the approximate solutions and the results of solving a model problem are presented.

В работах [1–4] рассмотрены вопросы численного моделирования динамического деформирования тел с прослоями сосредоточенных масс и тел, ослабленных трещинами, слабопрочными включениями, на берегах которых равномерно распределены массы соответствующих плотностей.

На практике, например для грунтовых сред, возникает необходимость в моделировании динамического деформирования тел, содержащих несколько произвольно расположенных в пространстве различных тонких включений.

В работе [3] исследован вопрос численного моделирования динамического деформирования тела, содержащего два непересекающихся прослоя, где один из них — слабопрочное включение, а на втором равномерно распределена масса плотности m .

В данной работе рассматривается вопрос численного моделирования динамического деформирования среды, содержащей два пересекающихся включения, на одном из которых равномерно распределена сосредоточенная масса, а второе — трещина, на которой задано расклинивающее давление.

Постановка задачи. Предположим, что тело, занимающее объем $\bar{\Omega}$ (рис. 1), содержит пересекающиеся разрез γ_1 , вдоль которого возможно проскальзывание без расхождения берегов и задано давление p , и тонкое включение γ_2 , вдоль которого равномерно распределена масса плотностью m . Считаем, что для каждой из областей Ω_i , $i = \overline{1, 4}$, справедлив закон Гука. Тогда уравнения равновесия имеют вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

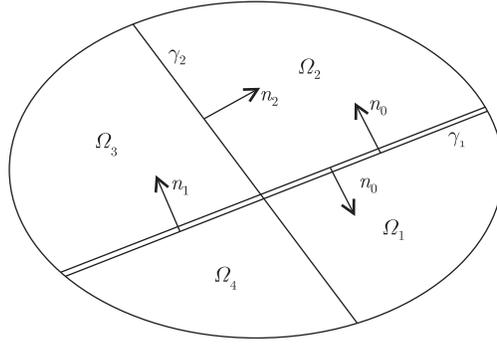


Рис. 1

где ρ — плотность; $u = u(x, t)$, $(x = (x_1, x_2, x_3))$, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, u_i — проекция вектора смещений u на i -ю, $i = \overline{1, 3}$, ось декартовой системы координат); σ_{ik} — компоненты тензора напряжений; $f = \{f_i(x, t)\}_{i=1}^3$ — вектор массовых сил; $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$, $\Omega = \bigcup_{i=1}^4 \Omega_i$.

Краевые условия следующие:

$$u = \tilde{\varphi}(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T], \quad (2)$$

условия сопряжения —

$$[u_n] = 0, \quad (x, t) \in \gamma_{1T} \cup \gamma_{2T}, \quad (3)$$

$$[u_s] = 0, \quad (x, t) \in \gamma_{2T}, \quad (4)$$

$$[\sigma_n] = m \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}, \quad [\tau_s] = m \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}, \quad (x, t) \in \gamma_{2T}, \quad (5)$$

$$[\tau_s] = 0, \quad \tau_s = r[u_s], \quad (x, t) \in \gamma_{1T}, \quad (6)$$

$$\sigma_{n_0} = -p, \quad (x, t) \in \gamma_{1T}^+ \cup \gamma_{1T}^-, \quad (7)$$

где

$$\gamma_{iT} = \gamma_i \times (0, T]; \quad \gamma_2 = (\overline{\Omega}_4 \cup \overline{\Omega}_3) \cap (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2), \quad \gamma_1 = (\overline{\Omega}_3 \cup \overline{\Omega}_2) \cap (\overline{\Omega}_4 \cup \overline{\Omega}_1),$$

$$\Gamma = \left(\bigcup_{i=1}^4 \partial\Omega_i \right) \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2), \quad [\varphi]_{\gamma_i} = \varphi^+ - \varphi^-, \quad \varphi^\pm|_{\gamma_i} = \varphi(x \pm 0, t),$$

начальные условия —

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bigcup_{i=1}^4 \overline{\Omega}_i, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in \bigcup_{i=1}^4 \overline{\Omega}_i. \quad (9)$$

Определение 1. Обобщенным решением начально-краевой задачи (1)–(9) называется функция $u = u(x, t) \in H$, которая $\forall v \in H_0$ удовлетворяет тождествам

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v \right\rangle \right\rangle + a(u, v) = l(v), \quad t \in (0, T]; \quad (10)$$

$$(u, v) = (u_0, v), \quad t = 0; \quad (11)$$

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle \right\rangle = \langle \langle \psi_0, v \rangle \rangle, \quad t = 0, \quad (12)$$

где

$$H = \left\{ v(x, t): v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \quad i = \overline{1, 4}; \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \in L_2(\Omega); \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} \in L_2(\gamma_2); \right. \\ \left. \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v_s^\pm}{\partial t^2} \in L_2(\gamma_1); v|_{\Gamma_T} = \tilde{\varphi}(x, t); [v_n]|_{\gamma_1} = 0; [v]|_{\gamma_2} = 0, \quad t \in (0, T) \right\};$$

$$H_0 = \{v(x): v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \quad i = \overline{1, 4}; v|_{\Gamma} = 0, [v]|_{\gamma_2} = 0, [v_n]|_{\gamma_1} = 0\},$$

$W_2^1(\Omega_i)$ — пространство функций Соболева, определенных на области Ω_i , $i = \overline{1, 4}$;

$$l(v) = (f, v) - 2 \int_{\gamma_1} p v_n d\gamma_1, \quad (\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \varphi_i \psi_i dx, \quad \varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^3, \quad \psi = \{\psi_i\}_{i=1}^3;$$

$$\langle \langle \varphi, \psi \rangle \rangle = (\varphi, \psi) + (m\varphi_n, \psi_n)_{L_2(\gamma_2)} + (m\varphi_s, \psi_s)_{L_2(\gamma_2)}, \quad (\varphi, \psi)_{L_2(\gamma_i)} = \int_{\gamma_i} \varphi \psi d\gamma_i, \quad i = 1, 2;$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^3 c_{iklm} \varepsilon_{ik}(u) \varepsilon_{lm}(v) dx + r \int_{\gamma_1} [u_s][v_s] d\gamma_1.$$

Приближенное обобщенное решение. Введем обозначения

$$H_0^N \subset H_0, \quad H^N \subset H;$$

$$H_0^N = \left\{ v^N(x): v^N(x) = \sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i(x), \quad \beta_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, N}; \quad N < 3n_1; \quad v^N(x)|_{\Gamma} = 0, \right. \\ \left. [v_n^N(x)]|_{\gamma_1} = 0, [v^N(x)]|_{\gamma_2} = 0 \right\},$$

$$H^N = \left\{ u^N(x, t): u^N(x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \varphi_i(x) + \tilde{\psi}(x, t), \quad \alpha_i \in C^2([0, T]), \quad i = \overline{1, N}; \quad N < 3n_1; \right. \\ \left. u^N(x, t)|_{\Gamma_T} = \tilde{\varphi}(x, t), [u_n^N(x, t)]|_{\gamma_{1T}} = 0, [u^N(x, t)]|_{\gamma_{2T}} = 0 \right\},$$

где $\tilde{\psi}(x, t)$ — фиксированная известная функция из H ; $\varphi_i(x)$ — базисные функции, построенные с помощью вектор-функций вида $(\psi_i(x), 0, 0)^T$, $(0, \psi_i(x), 0)^T$, $(0, 0, \psi_i(x))^T$; $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{n_1}$ — система линейно-независимых скалярных функций, определенных на Ω , $\psi_i|_{\Omega_l} \in W_2^1(\Omega_l)$, $l = \overline{1, 4}$.

Определение 2. Приближенным обобщенным решением начально–краевой задачи (1)–(9) называется вектор-функция $u^N(x, t) \in H^N$, которая $\forall v^N(x) \in H_0^N$ удовлетворяет тождествам

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}, v^N \right\rangle \right\rangle + a(u^N, v^N) = l(v^N), \quad t \in (0, T]; \quad (13)$$

$$(u^N, v^N) = (u_0, v^N), \quad t = 0; \quad (14)$$

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial u^N}{\partial t}, v^N \right\rangle \right\rangle = \langle \langle \psi_0, v^N \rangle \rangle, \quad t = 0. \quad (15)$$

Тождества (13)–(15) с учетом определения пространств H^N , H_0^N можно записать таким образом:

$$M\ddot{\alpha} + K\alpha = F, \quad t \in (0, T]; \quad (16)$$

$$M_0\alpha(0) = F_0; \quad (17)$$

$$M_1\dot{\alpha}(0) = F_1, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} M &= \{m_{ij}\}_{i,j=1}^N, & M_0 &= \{m_{ij}^0\}_{i,j=1}^N, & M_1 &= \{m_{ij}^1\}_{i,j=1}^N, \\ F &= \{\bar{f}_i\}_{i=1}^N, & F_0 &= \{\bar{f}_{i0}\}_{i=1}^N, & F_1 &= \{\bar{f}_{i1}\}_{i=1}^N, & K &= \{k_{ij}\}_{i,j=1}^N, \\ m_{ij} &= \langle \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \rangle, & m_{ij}^0 &= (\varphi_i, \varphi_j), & m_{ij}^1 &= \langle \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \rangle, & f_{i0} &= (u_0, \varphi_i) - (\tilde{\psi}, \varphi_i)(0), \\ \bar{f}_i &= l(\varphi_i) - \left\langle \left\langle \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2}, \varphi_i \right\rangle \right\rangle - a(\tilde{\psi}, \varphi_i), & f_{i1} &= \langle \langle \psi_0, \varphi_i \rangle \rangle - \left\langle \left\langle \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}, \varphi_i \right\rangle \right\rangle, & k_{ij} &= a(\varphi_i, \varphi_j). \end{aligned}$$

Сходимость приближенных решений. Каждой функции

$$u(x, t) \in L = \{v(x, t) : v|_{\bar{\Omega}_{iT}} \in C^{1,0}(\bar{\Omega}_{iT}) \cap C^{2,0}(\Omega_{iT}) \cap C^{0,2}(\Omega_{iT}), i = \bar{1}, \bar{4}, t \in [0, T];$$

$$v|_{\Gamma_T} = \tilde{\varphi}, [v_n]|_{\gamma_{1T}} = 0, [v]|_{\gamma_{2T}} = 0\}$$

поставим в соответствие функцию $\bar{u}^N \in H^N$, удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$a(u - \bar{u}^N, v^N) = 0, \quad \forall v^N(x) \in H_0^N, \quad \forall t \in (0, T]. \quad (19)$$

Тогда

$$a(\bar{u}^N, v^N) = a(u, v^N),$$

или

$$K\bar{\alpha} = \bar{F}, \quad (20)$$

где матрица K определена в (16); $\bar{F} = \{\bar{f}_i\}_{i=1}^N$, $\bar{f}_i = a(u, \varphi_i) - a(\tilde{\psi}, \varphi_i)$. Здесь матрица K – симметрична и положительно определена. Тогда из (20) следует

$$\bar{\alpha} = K^{-1}\bar{F}, \quad \forall t \in (0, T].$$

Тем самым установлено существование единственного элемента $\bar{u}^N \in H^N$, удовлетворяющего тождеству (19).

Следуя [4, 5], с учетом (19) и оценок интерполяции [6] легко установить справедливость такого утверждения.

Теорема 1. Пусть компоненты классического решения $u(x, t)$ начально-краевой задачи (1)–(9) достаточно гладкие на областях $\bar{\Omega}_{iT} = \bar{\Omega}_i \times (0, T]$, $i = \overline{1, 4}$. Тогда для приближенного обобщенного решения $U(x, t) \in H_k^N$ имеет место оценка

$$\|u - U\|_{L_2 \times L_\infty} \leq ch^k,$$

где $\|\psi\|_{L_2 \times L_\infty} = \sup_{t \in (0, T)} \|\psi\|_{L_2}(t)$; $c = \text{const}$; h – наибольший из диаметров всех конечных элементов; k – степень полиномов конечных элементов регулярного семейства на каждой из областей $\bar{\Omega}_i$, $i = \overline{1, 4}$.

Схема Кранка–Николсона. Приближенное решение задачи Коши (16)–(18) будем искать с помощью схемы Кранка–Николсона [1–5]:

$$\alpha^0 = \alpha(0) = M_0^{-1}F_0, \quad \beta^0 = M_1^{-1}F_1, \quad (21)$$

$$\left(M + \frac{\tau^2}{4}K\right)\beta^{j+1} = \left(M - \frac{\tau^2}{4}K\right)\beta^j - \tau K\alpha^j + \frac{\tau}{2}(F^{j+1} + F^j), \quad (22)$$

$$\alpha^{j+1} = \alpha^j + \frac{\tau}{2}(\beta^{j+1} + \beta^j), \quad j = \overline{0, m-1}. \quad (23)$$

Здесь по переменной t на отрезке $[0, T]$ введена регулярная сетка

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{ t_j = j\tau : j = 0, 1, 2, \dots, m; \tau = \frac{T}{m} \right\}.$$

В силу высказанных предположений относительно коэффициентов рассматриваемой задачи и базисных функций $\varphi_i(x)$, матрицы M , K , M_0 , M_1 – постоянные, симметричные, положительно определенные. Следовательно, при $t = t_{j+1}$ приближенное решение задачи (1)–(9) определим выражением

$$U^{j+1}(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^{j+1} \varphi_i(x) + \tilde{\psi}(x, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, m-1}. \quad (24)$$

Пусть $u(x, t)$ – классическое решение начально-краевой задачи (1)–(9), а \bar{u}^N – его единственный образ из H_k^N (в смысле скалярного произведения (19)).

Лемма 1. Пусть $u(x, t)$ – обобщенное решение задачи (1)–(9), которое достаточно гладкое на $\bar{\Omega}_{iT}$, $i = \overline{1, 4}$. Тогда имеет место неравенство

$$\max_j \langle \langle U^j - \bar{u}^{Nj} \rangle \rangle \leq c(\langle \langle U^0 - \bar{u}^{N0} \rangle \rangle + h^k + \tau^2). \quad (25)$$

Доказательство леммы проводится на основании работ [1, 4, 5].

Теорема 2. Пусть $u(x, t)$ – классическое решение задачи (1)–(9), которое удовлетворяет условиям леммы 1 и каждая из компонент которого имеет ограниченные $(k+1)$ -е производные по пространственным переменным на $\bar{\Omega}_i$, $i = \overline{1, 4}$, а $\{U^j(x)\}_{j=0}^m$ – решение,

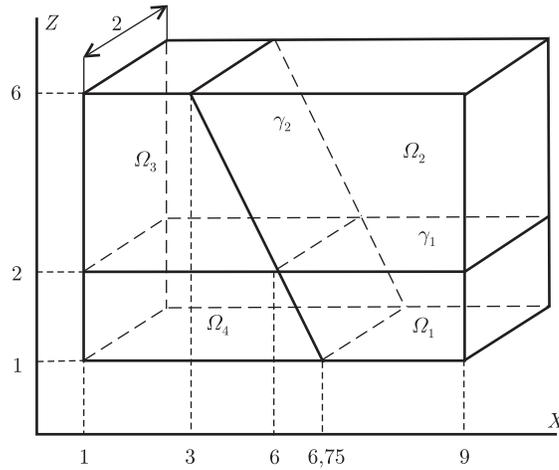


Рис. 2

получаемое с помощью множества H_k^N и схемы Кранка–Николсона. Тогда имеет место оценка

$$\max_{j=0,m} \langle u_j - U^j \rangle \leq c(h^k + \tau^2).$$

Теорема доказывается на основании работ [1, 4, 5].

Результаты решения модельного примера. Область $\Omega = \bigcup_{i=1}^4 \Omega_i$ состоит из четырех подобластей (рис. 2), на каждой из которых определена система уравнений (1) с параметрами: $\rho = 1000$, $\lambda = 3600$, $\mu = 1400$; массовая сила $f = (1400, 0, 0)^T$. На включении γ_1 заданы условия сопряжения (3), (6), (7), где $r = 1000$, $p = 0$. На включении γ_2 заданы условия сопряжения (3)–(5), где $m = 2000$. На границе области для $t \in (0, T]$ заданы краевые условия:

$$\begin{cases} u = 1,9x + 0,6z - 5 + 0,7t^2, \\ v = 0,18y + z + 1, \\ w = 0,4x - 1,17z + 4,5, \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1,9x + 0,6z - 3,6 + 0,7t^2, \\ v = 0,18y + z + 2,4, \\ w = 0,4x - 1,17z + 4,5, \end{cases}$$

$$x \in \partial\bar{\Omega}_1 \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2);$$

$$x \in \partial\bar{\Omega}_2 \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2);$$

$$\begin{cases} u = 1,1x + 2,4 + 0,7t^2, \\ v = 0,18y + z + 2,4, \\ w = x - 0,72z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 1,1x + 1 + 0,7t^2, \\ v = 0,18y + z + 1, \\ w = x - 0,72z, \end{cases}$$

$$x \in \partial\bar{\Omega}_3 \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2);$$

$$x \in \partial\bar{\Omega}_4 \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2).$$

Начальные условия при $t = 0$ имеют вид:

$$\begin{cases} u = 1,9x + 0,6z - 5, \\ v = 0,18y + z + 1, \\ w = 0,4x - 1,17z + 4,5, \end{cases} \quad x \in \bar{\Omega}_1; \quad \begin{cases} u = 1,9x + 0,6z - 3,6, \\ v = 0,18y + z + 2,4, \\ w = 0,4x - 1,17z + 4,5, \end{cases} \quad x \in \bar{\Omega}_2;$$

$$\begin{cases} u = 1,1x + 2,4, \\ v = 0,18y + z + 2,4, \\ w = x - 0,72z, \end{cases} \quad x \in \bar{\Omega}_3; \quad \begin{cases} u = 1,1x + 1, \\ v = 0,18y + z + 1, \\ w = x - 0,72z, \end{cases} \quad x \in \bar{\Omega}_4.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Классическое решение $u = u(x, t) = (u(x, t), v(x, t), w(x, t))^T$ имеет вид

$$\begin{cases} u = 1,9x + 0,6z - 5 + 0,7t^2, \\ v = 0,18y + z + 1, \\ w = 0,4x - 1,17z + 4,5, \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1,9x + 0,6z - 3,6 + 0,7t^2, \\ v = 0,18y + z + 2,4, \\ w = 0,4x - 1,17z + 4,5, \end{cases}$$

$$x \in \bar{\Omega}_1;$$

$$x \in \bar{\Omega}_2;$$

$$\begin{cases} u = 1,1x + 2,4 + 0,7t^2, \\ v = 0,18y + z + 2,4, \\ w = x - 0,72z, \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1,1x + 1 + 0,7t^2, \\ v = 0,18y + z + 1, \\ w = x - 0,72z, \end{cases}$$

$$x \in \bar{\Omega}_3;$$

$$x \in \bar{\Omega}_4.$$

Модельный пример решен численно с использованием кусочно-линейных функций метода конечных элементов. Область разбита на 3900 тетраэдров (узловых точек — 1080), размерность результирующей системы линейных алгебраических уравнений — 3240, полуплоскость ленты матрицы — 636. При $T = 5$ для $\tau = 0,5$ максимальная $\delta\%$ по всем точкам $\delta(u_1)\% = 6E-7$, $\delta(u_2)\% = 4E-7$, $\delta(u_3)\% = 2E-6$, средняя $\delta\%$ по всем точкам $\delta(u_1)\% = 1E-8$, $\delta(u_2)\% = 1E-8$, $\delta(u_3)\% = 3E-8$, где относительная погрешность $\delta\% = |(u_T - u_{пр})/u_T| \cdot 100\%$; u_T , $u_{пр}$ — соответственно точное (классическое) и приближенное решения.

1. Сергиенко И. В., Дейнека В. С. О численном решении задачи динамической теории упругости для тел с сосредоточенными массами // Прикл. механика. — 2004. — 40, № 12. — С. 65–75.
2. Дейнека В. С., Белоус М. В. Численное решение задачи динамической теории упругости с сосредоточенной массой // Компьютерная математика. — 2004. — № 2. — С. 89–98.
3. Сергиенко И. В., Дейнека В. С. О численном решении задачи динамической теории упругости с сосредоточенной массой и слабопрочным включением // Доп. НАН України. — 2004. — № 6. — С. 60–69.
4. Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление. — Киев: Наук. думка, 2007. — 703 с.
5. Garth A. Baker. Error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1976. — 13, No 4. — P. 564–576.
6. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — Москва: Мир, 1980. — 512 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 04.04.2008