



УДК 539.182+518.5+517.986.69

© 2008

Член-кореспондент НАН України **В. А. Даниленко,**  
**С. І. Скуратівський**

### **Резонансні режими поширення нелінійних хвильових полів у середовищах з коливними включеннями**

*Using the asymptotic methods of nonlinear mechanics, the peculiarities of unifrequency resonance regimes of the spreading of nonlinear wave fields in a bounded rod are investigated within a mathematical model of media with oscillating inclusions.*

Результати експериментальних досліджень процесів деформування геосередовищ у широкому діапазоні швидкостей навантаження, які проведено в останні десятиліття, свідчать про те, що геосередовищам притаманні дві основні риси — дискретність та коливний рух дискретних елементів [1, 2].

Для описання хвильових полів і процесів деформування таких геосередовищ запропоновано математичні моделі середовищ [3, 4], в яких коливання внутрішніх осциляторів враховані в динамічних рівняннях стану. Застосовуючи нелінійні нелокальні моделі геосередовищ [4], досліджено точні аналітичні та хаотичні інваріантні розв'язки рівнянь, що описують хвильові поля в багатокомпонентних геосередовищах з внутрішніми осциляторами [5–7].

Необхідно відзначити, що залежно від будови середовища та його термодинамічного стану осциляцію структурних елементів можна врахувати також введенням у рівняння руху середовища додаткових об'ємних сил, які виникають в результаті коливань елементів структури. Так, у роботах [8, 9] запропоновано лінійну математичну модель середовища зі структурою, в якій осциляції структурних елементів враховані в об'ємних силах, а не в рівняннях стану, як це виконано у публікаціях [3, 4]. У зв'язку з нелінійністю природного геоматеріалу виникає необхідність поширити цю модель на нелінійні середовища.

У даному повідомленні наведено результати дослідження резонансних режимів поширення нелінійних хвильових полів у середовищах з коливними включеннями, математична модель якого має такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - m_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \omega^2 \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) (W - u) = 0,$$

$$\sigma = A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + A_3 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3, \quad (1)$$

$$A_1 = \frac{\alpha_1}{\theta^2 \rho}, \quad A_2 = \frac{\alpha_2 h}{\theta^3 \rho}, \quad A_3 = \frac{\alpha_3 h^2}{\theta^4 \rho},$$

де  $u$  та  $W$  — зміщення основного середовища та часткового осцилятора, який характеризується власною частотою  $\omega$  та часом релаксації  $\tau$ ;  $\sigma$  — механічна напруга;  $\rho$  — густина середовища у ненавантаженому стані;  $m_1 \rho$  — густина включень; коефіцієнти  $\alpha_i$  виражені через відповідні модулі пружності або оцінюються безпосередньо при обробці натурних даних;  $\theta$ ,  $h$  — масштабні коефіцієнти.

Дослідимо резонансні режими поширення хвильових полів у стрижні довжини  $l$  з нульовими початковими умовами, вільним лівим кінцем та гармонічним навантаженням на правому:  $\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x}(x=L) = \frac{\theta}{h} \gamma \sin \alpha t \equiv \phi(t)$ ,  $\theta L = l$ .

Амплітудну криву коливань стрижня побудуємо методом Боголюбова–Митропольського [10, 11]. Розглянемо випадок, коли  $A_{2,3}$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$  є малими одного порядку  $\varepsilon$ .

Після зведення крайових умов до однорідних за допомогою заміни змінної  $U(x, t) = u(x, t) - \frac{x^2}{2L\alpha_1} \phi$  встановимо умови, при яких у незбуреній системі можливі незгасаючі коливання з частотою  $\Omega$ . Підставляючи розв'язок вигляду

$$U = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \varphi_1 \cos \Omega t, \quad W = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \varphi_2 \cos \Omega t, \quad \varphi_{1,2} = \text{const} \quad (2)$$

у систему (1), у нульовому наближенні отримаємо, що  $\Omega$  задовольняє таке рівняння:

$$\frac{A_1 \pi^2}{L^2} = \Omega^2 \left( 1 + \frac{\omega^2 m_1}{\omega^2 - \Omega^2} \right), \quad (3)$$

розв'язки якого визначають значення власних частот моделі (1). Аналізуючи графік залежності  $\Omega(m_1)$  (рис. 1), у момент  $m_1 > 0$  додатково з частотою  $\Omega_0 = \sqrt{A_1 \pi^2 L^{-2}}$ , яка відповідає лінійній класичній моделі ідеально пружного середовища, з'являється нова частота, що пов'язана з частковим осцилятором. При збільшенні параметра  $m_1$  частота  $\min(m_1, \Omega_0)$  монотонно знижується, тоді як частота  $\max(m_1, \Omega_0)$  монотонно зростає.

При фіксованому  $m_1$  та змінному  $\omega$  (див. рис. 1) розв'язки рівняння (3) наближаються до асимптотичних значень  $\sqrt{A_1 \pi^2 / L^2 (1 + m_1)}$  та  $\sqrt{(1 + m_1) \omega}$ .

Знайдемо продовження співвідношень (2) за малим параметром  $\varepsilon$  у резонансному випадку  $\Omega - \alpha = \delta \varepsilon$ . Тоді динаміка амплітуди  $\lambda$  та фази  $\alpha t + \vartheta$  періодичного розв'язку вигляду (2) описується системою

$$\lambda' = -\lambda \mu_1 + \mu_4 \cos \vartheta, \quad \vartheta' = \mu_2 + \mu_3 \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \mu_4 \sin \vartheta, \quad (4)$$

де

$$\mu_1 = \frac{\chi_2 \omega^2 \Omega^2 \tau}{2\Delta(\omega^2 - \Omega^2)}, \quad \mu_2 = \frac{\Omega^2 - \alpha^2}{2\alpha}, \quad \mu_3 = \frac{9A_3 \pi^4}{32\alpha \Delta L^4}, \quad \mu_4 = \frac{\gamma L}{\pi^2 \alpha \Delta} [\alpha^2 + \chi_2 \omega^2],$$

$$\Delta = 1 + \frac{(m_1 + \chi_2) \omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad \chi_2 = \frac{m_1 \Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}.$$

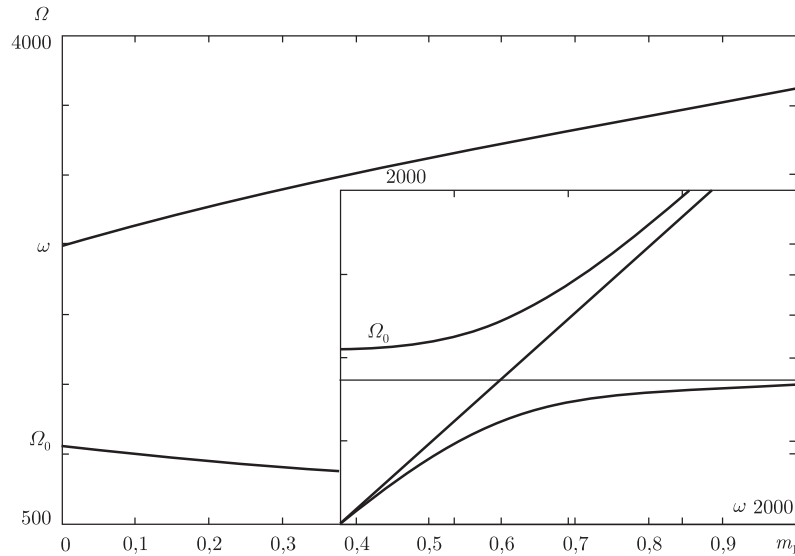


Рис. 1. Діаграма залежності власних частот моделі (1) від параметра  $m_1$  при  $\omega = 2500 \text{ c}^{-1}$

Прирівнюючи праві частини системи (4) до нуля, знайдемо стаціонарні значення амплітуди коливань:

$$\lambda^6 + 2\frac{\mu_2}{\mu_3}\lambda^4 + \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_3^2}\lambda^2 - \left(\frac{\mu_4}{\mu_3}\right)^2 = 0. \quad (5)$$

Виберемо за основне середовище граніт з густиною  $\rho = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , масштабні коефіцієнти  $\theta = \sqrt{\alpha_1 \rho^{-1}} = 884,8277$ ,  $h = 0,1$ . Тоді  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0,0599$ ,  $A_3 = 0,0081$  [12], що відповідає припущенню про малу нелінійність. Інші параметри виберемо довільно, наприклад  $\tau = 3 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ ,  $L = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $\gamma = 0,3 \cdot 10^4 \text{ Па}$ . Зафіксуємо  $m_1 = 0,5$  та  $\omega = 2500 \text{ c}^{-1} > \Omega_0$ , що на основі формули (3) дає змогу обчислити власні частоти середовища  $\Omega_1 = 837,5659 \text{ c}^{-1}$  та  $\Omega_2 = 3125,7169 \text{ c}^{-1}$ . Залежність амплітуди стаціонарних коливань при зміні  $\alpha$  вивчалась поблизу  $\Omega_1$ . Розв'язуючи рівняння (5) чисельно залежно від параметра  $\alpha$ , отримаємо графік резонансної кривої (див. рис. 2, графік 1). Аналогічним чином отримаємо резонансні криві при  $\omega = 3500 \text{ c}^{-1}$  та  $\omega = 5000 \text{ c}^{-1}$  (графіки 2 та 3). Графік скелетної кривої (умова точного резонансу) визначається співвідношенням  $\mu_2 + \mu_3 \lambda^2 = 0$  (пунктирна лінія), звідки випливає, що напрям її відхилення від вертикалі залежить від знака  $A_3/\Delta(\Omega - \alpha)$ . У даному випадку для  $\alpha > \Omega_0$  при зростанні частоти коливань внутрішніх осциляторів спостерігається відхилення скелетної кривої від вертикалі (праворуч) з утворенням області, яка відповідає режимам зі зривом амплітуди коливань. Отже, положення та форма резонансної кривої визначається двома взаємозв'язаними факторами: врахуванням коливних включень та нелінійністю основного середовища.

Детальні дослідження резонансних кривих при зміні параметра  $m_1$  виявили аналогічні ефекти (рис. 3, а). Як тільки основне середовище є нелінійним  $A_3 \neq 0$ , резонансні криві можуть мати характерний гістерезис відносно напрямку зміни параметра  $m_1$ . Вивчення впливу на резонансні режими зміни  $\omega$  при фіксованих усіх інших параметрах показує, що в окремих випадках (див. рис. 3, б; графік 2) лінійна модель може давати взагалі некоректну оцінку значень стаціонарної амплітуди. По-друге, в цьому випадку скелетна крива відхиляється вліво, а на резонансній кривій виділяються частини графіка, точки з яких

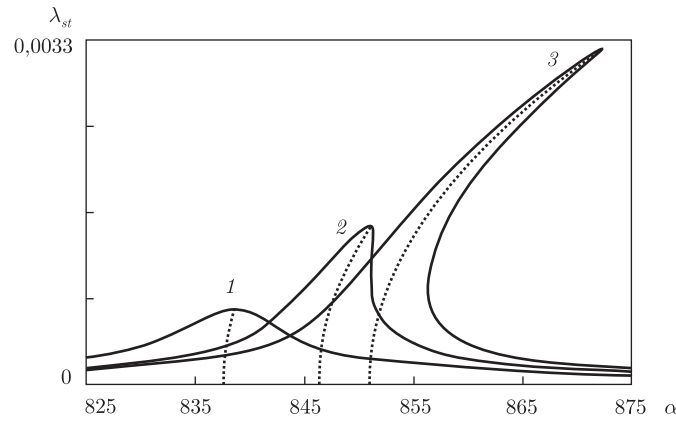


Рис. 2. Резонансні криві для нелінійної моделі з включеннями при  $m_1 = 0,5$  та  $\omega = 2500 \text{ c}^{-1}$  (1);  $\omega = 3500 \text{ c}^{-1}$  (2);  $\omega = 5000 \text{ c}^{-1}$  (3)

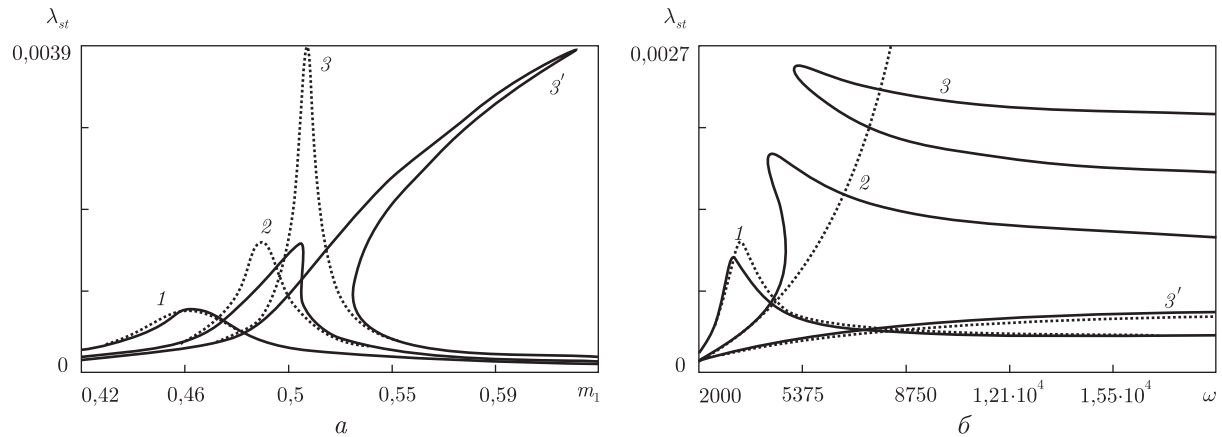


Рис. 3. Резонансні криві для нелінійної (суцільні лінії) та лінійної (пунктирна лінія) моделі з включеннями при змінному  $m_1$  та фіксованому  $\omega$  (а):  $\omega = 2500 \text{ c}^{-1}$  (1),  $\omega = 3500 \text{ c}^{-1}$  (2),  $\omega = 5500 \text{ c}^{-1}$  (3, 3'); при змінному  $\omega$  та фіксованому  $m_1$  (б):  $m_1 = 0,48$  (1),  $m_1 = 0,52$  (2),  $m_1 = 0,55$  (3, 3')

відповідають прихованим режимам (див. рис. 3, б; графік 3). На них не можна потрапити при повільній зміні параметра  $\omega$ , якщо початкові умови не були вибрані безпосередньо з околу цього режиму.

1. Садовский М. А. Автомодельность геодинамических процессов // Вестн. АН СССР. – 1986. – № 8. – С. 3–11.
2. Родионов В. Н. Очерк геомеханики. – Москва: Науч. мир, 1996. – 64 с.
3. Николаевский В. Н. Вязкоупругость с внутренними осцилляторами как возможная модель сейсмоактивной среды // Докл. АН СССР. – 1985. – **283**, № 6. – С. 1321–1324.
4. Даневич Т. Б., Даниленко В. А. Нелінійні нелокальні моделі багатокомпонентних релаксуючих середовищ з внутрішніми осциляторами // Доп. НАН України. – 2005. – № 1. – С. 106–110.
5. Даневич Т. Б., Даниленко В. А. Точні аналітичні розв'язки нелінійних рівнянь динаміки релаксуючих середовищ з просторовою та часовою нелокальністю // Там само. – 2004. – № 3. – С. 110–114.
6. Даневич Т. Б., Даниленко В. А. Точні аналітичні розв'язки нелінійних рівнянь динаміки нелокальних середовищ при врахуванні температурних членів та нестационарності узагальненої термодинамічної сили // Там само. – 2004. – № 4. – С. 106–112.

7. Даниленко В. А., Скурятівський С. І. Хаотичні інваріантні розв'язки нелінійних нелокальних моделей багатокомпонентних середовищ з внутрішніми осциляторами // Там само. – 2006. – № 9. – С. 111–115.
8. Слепян Л. И. Волна деформаций в стержне с амортизированными массами // Механика тв. тела. – 1967. – № 5. – С. 34–40.
9. Пальмов В. А. Об одной модели среды сложной структуры // Прикл. мат. и мех. – 1969. – Вып. 4. – С. 768–773.
10. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1974. – 504 с.
11. Писаренко Г. С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – Киев: Наук. думка, 1970. – 357 с.
12. Johnson P. A., Rasolofosaon P. N. J. Manifestation of nonlinear elasticity in rock: convincing evidence over large frequency and strain intervals from laboratory studies // Nonlin. Processes in Geophys. – 1996. – No 3. – P. 77–88.

Відділення геодинаміки вибуху Інституту  
геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, Київ

Надійшло до редакції 06.03.2008

УДК 532.59

© 2008

Член-корреспондент НАН України В. А. Иванов, В. В. Фомин,  
член-корреспондент НАН України Л. В. Черкесов, Т. Я. Шульга

## **Исследование влияния стационарных течений на динамические процессы и трансформацию примеси в Азовском море, вызываемые прохождением циклонов**

*The comparative analysis of the diffusion processes of a contaminating admixture in the Sea of Azov in the presence of hydrodynamical processes generated by a seasonal wind and disturbed by cyclonic formations is carried out by using a 3D nonlinear  $\sigma$ -coordinate model. The comparison of the results of numerical experiments with data on cyclones moving along different trajectories in the field of the seasonal wind is performed. The character of the disturbances induced by a moving cyclone into the stationary currents is studied.*

Одной из задач современной океанологии является изучение механизмов изменчивости динамических процессов, возникающих в морях и океанах, и предсказание будущих изменений, связанных с потеплением климата и растущим антропогенным воздействием. Особая роль в исследованиях отведена анализу наиболее вероятных сценариев распространения загрязнений, на эволюцию которых заметно влияет перенос течениями. В Азовском море, сравнительно небольшом и мелководном бассейне, течения определяются прежде всего прямым воздействием ветра и рельефом дна. На основании результатов численного моделирования в работах [1, 2] показано, что прохождение циклонов над Азовским морем существенно влияет на динамику вод. Поэтому представляет интерес анализ влияния атмосферных аномалий типа циклонов на циркуляцию вод и распространение загрязнений в этом бассейне. В статье [3] с использованием трехмерной нелинейной  $\sigma$ -координатной модели [4] исследуются течения и изменения уровня, вызываемые движущимися циклонами при отсутствии