5. *Kalashnikov A. S.* On the dependence of properties of solutions of parabolic equations in unbounded domains on the behavior of the coefficients at infinity // Math. USSR Sb. – 1986. – **53**. – P. 399–410.
6. *Kalashnikov A. S.* On quasilinear degenerating parabolic equation with singular lower-order terms and growing initial values // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, No 6. – С. 999–1009.
7. *Abdullaev U. G.* Exact local estimates for the supports of solutions in problems for nonlinear parabolic equations // Мат. сб. – 1995. – **186**, No 8. – С. 3–24.
8. *Ughi M.* Initial behavior of the free boundary for a porous media equation with strong absorption // Adv. Math. Sci. and Appl. Gakkotosho, Tokyo. – 2001. – **11**, No 1. – P. 333–345.
9. *Li Jun-Jie.* Instantaneous shrinking of the support of solutions to certain parabolic equations with unbounded initial data // Nonlinear Analysis. – 2002. – **48**. – P. 1–12.
10. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Adv. Different. Equat. – 2005. – **10**, No 1. – P. 89–120.
11. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Finite speed of propagation for the thin film equation and other higher order parabolic equations with general nonlinearity // Interfaces and Free Boundaries. – 2001. – **3**, No 3. – P. 233–264.
12. *Andreucci D., Tedeev A. F.* A Fujita type result for a degenerate Neumann problem in domains with non compact boundary // J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – **231**. – P. 543–567.
13. *Kazuhiro Ishige.* On the existence of solutions of the Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation // SIAM J. Math. Anal. – 1996. – **27**, No 5. – P. 1235–1260.
14. *Fan H. J.* Cauchy problem of some doubly degenerate parabolic equations with initial datum a measure // Acta Math. Sinica. Engl. Ser. – 2004. – **20**, No 4. – P. 663–682.
15. *Bernis F.* Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1986. – **A104**. – P. 1–19.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 05.05.2008

УДК 531.36

Член-корреспондент НАН Украины **А. М. Ковалев, А. С. Суйков**

Построение функции Ляпунова при выполнении теоремы Барбашина–Красовского

The paper presents a method of building a strong Lyapunov function from a weak one for autonomous systems satisfying the conditions of the Barbashin–Krasovskii theorem. The method is based on results from the invariant set theory. The resulting function is built iteratively as a sum of the initial Lyapunov function with semidefinite derivative and several additional functions, whose derivatives have definite signs at the points, where the derivative of the initial function becomes zero.

Для систем, удовлетворяющих условиям теоремы Барбашина–Красовского, получено явное выражение функции Ляпунова со знакоопределенной производной. Функция строится в виде $W = V + V_a$, где V — исходная функция Ляпунова со знакопостоянной производной, а V_a представляет собой сумму некоторых дополнительных функций. Каждое из составляющих V_a слагаемых сужает множество, на котором производная получаемой функции обращается в нуль. В процессе построения к V_a добавляются слагаемые до тех пор, пока производная $V + V_a$ не станет знакоопределенной. Для построения дополнительных функций используется метод инвариантных соотношений.

1. Теорема Барбашина–Красовского и метод инвариантных соотношений. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \qquad f(0) = 0; \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \qquad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где D — некоторая окрестность нуля, функция $f(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой достаточное число раз для $x \in D$. Точка означает дифференцирование по времени t зависимой переменной x, а также функции $V(x)$ в силу системы (1): $\dot{V}(x) = (\nabla V(x), f(x))$.

Асимптотическая устойчивость нулевого решения может быть установлена с помощью теоремы Барбашина–Красовского [1].

Теорема 1. *Если существует определенно положительная функция $V(x)$ такая, что $\dot{V}(x)$ — отрицательно постоянная функция и множество $M = \{x \colon \dot{V}(x) = 0\}$ не содержит целых полутраекторий, кроме точки $x = 0$, то нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Функцию Ляпунова $V(x)$ в теореме 1 будем предполагать непрерывно дифференцируемой достаточное число раз. Тогда уравнение $\dot{V}(x) = 0$ определяет в окрестности нуля некоторое множество поверхностей M_i, описываемых уравнениями $\varphi_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, s)$, где $\varphi_i(x)$ — n_i-мерные дифференцируемые вектор-функции, причем $\nabla\varphi_i(x) \neq 0$ для $x \in M_i$, кроме $x = 0$.

Проверить, содержит ли множество $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$ целые полутраектории, т. е. некоторое инвариантное многообразие, можно с помощью метода инвариантных соотношений [2].

Соотношение вида $\varphi(x) = 0$ (при условии $\nabla\varphi(x) \neq 0$) называется инвариантным соотношением системы (1), если множество

$$\mathfrak{G} \colon \varphi^{(i)}(x) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

непусто; само такое множество $\mathfrak{G}$ называется инвариантным многообразием. Здесь $\varphi^{(i)} = (\nabla\varphi^{(i-1)}, f)$, $i \geqslant 1$, — i-я производная φ в силу (1), $\varphi^{(0)} \equiv \varphi$. Если $x_0(t)$ является решением системы (1) и $x_0(t_0) \in \mathfrak{G}$, то $x_0(t) \in \mathfrak{G}$ для всех $t \geqslant t_0$, т. е. множество $\mathfrak{G}$ содержит всю полутраекторию системы (1), проходящую через точку $x_0(t_0)$.

Следующая теорема [2] дает возможность проверить, содержит ли множество целые полутраектории, т. е. является ли инвариантным многообразием системы (1):

Теорема 2. *Порождаемое соотношением $\varphi(x) = 0$ инвариантное многообразие $\mathfrak{G}$ системы* (1) *определено уравнениями*

$$\varphi^{(i)}(x) = 0, \qquad i = \overline{0, l-1},$$

где $l \leqslant n$ — число функционально независимых функций в последовательности $\varphi(x)$, $\dot{\varphi}(x)$, $\ddot{\varphi}(x)$, ….

Таким образом, если некоторое множество K задается соотношением $\varphi(x) = 0$ и система

$$\varphi(x) = 0, \qquad \dot{\varphi}(x) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi^{(n-1)}(x) = 0 \tag{2}$$

не имеет решений, кроме $x = 0$, то это множество не содержит целых полутраекторий, за исключением $x = 0$. Заметим, что для выполнения теоремы важно наличие условия

$\nabla\varphi \neq 0$. В противном случае система (2) может оказаться совместной, даже если траектории системы (1) на задаваемом φ множестве K отсутствуют.

Если система (1) и функция Ляпунова V удовлетворяют условиям теоремы 1, то множество $M = \{x\colon \dot{V}(x) = 0\}$ и любое его подмножество заведомо не содержат целых полутраекторий. Это позволяет сформулировать следующее утверждение:

Лемма 1. *Если множество M не содержит целых полутраекторий, а подмножество $G \subset M$ задается функцией φ: $G = \{x\colon \varphi(x) = 0\}$, то для каждой точки $x_0 \in G$ найдется $i < n$ такое, что $\varphi^{(i)}(x_0) \neq 0$.*

Действительно, если для какой-то точки $x_0 \in G$ такого i не найдется, то это значит, что система $\varphi(x_0) = 0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0$ совместна и точка x_0 принадлежит множеству ее решений. Но тогда из теоремы 2 следует, что G (а значит, и M) содержит инвариантное многообразие.

2. Преобразование системы. Для систем, удовлетворяющих условиям теоремы Барбашина–Красовского, исходная система (1) может быть преобразована к форме, существенно упрощающей построение искомой функции Ляпунова. Справедливо следующее утверждение [3]:

Лемма 2. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям теоремы 1, а множество M не содержит целых полутраекторий. Тогда систему* (1) *можно представить в виде*

$$\dot{x} = f_M(x) + f_N(x) \tag{3}$$

так, что на множестве M функция $f_M(x) = 0$, а функция $f_N(x) \neq 0$.

Действительно, пусть такой функции $f_N(x)$ не существует, т. е. $f(x) = 0$ на некотором подмножестве M. Тогда $\varphi^{(i)} = (\nabla\varphi^{(i-1)}, f) = 0$ на этом подмножестве, а это согласно теореме 2 означает существование на нем инвариантного многообразия, что противоречит условию.

Видно, что лемму можно применить как ко всему $M = \bigcup M_i$, так и к отдельным M_i. Во втором случае функции f_{Ni} и f_{Mi} будут свои для каждого M_i.

3. Дополнительная функция. При наличии функции Ляпунова, удовлетворяющей теореме Барбашина–Красовского, построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной можно провести путем добавления к данной функции V_s, которую примем в качестве начальной, дополнительной функции V_a, производная которой $\dot{V}_a$ отрицательна на множестве $M = \{x\colon \dot{V}_s(x) = 0\}$. Функцию V_a следует выбирать достаточно малой, чтобы она не могла повлиять на знакоопределенность V_s и знакопостоянство $\dot{V}_s$. Оказывается, что условия, накладываемые теоремой Барбашина–Красовского на систему (1), позволяют это сделать.

Поскольку согласно лемме 1 в любой точке $x \in M$ среди $\varphi_i^{(j)}(x)$, $j = \overline{0, n-1}$, найдется ненулевое значение, можно использовать функции $\varphi_i^{(j)}$ для построения дополнительной функции.

Предположим сначала, что $s = 1$, т. е. все множество M можно задать одной функцией φ: $M = \{x\colon \varphi(x) = 0\}$ при условии $\nabla\varphi(x) \neq 0$ на M. Учитывая (3), обозначим $\widetilde{\varphi} = (\nabla\varphi, f_N)$. Поскольку $f_M(x) = 0$ при $x \in M$, то имеет место равенство $\widetilde{\varphi}(x) = \dot{\varphi}(x)$. Рассмотрим выражение

$$w = \widetilde{\varphi}^{2m}(\widetilde{\varphi}, \varphi). \tag{4}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что $\dot{w}$ на множестве M принимает значение $\widetilde{\varphi}^{2m+2}$, т. е. $\dot{w} > 0$ на M при условии $\dot{\varphi} \neq 0$ на M. Можно также доказать, что при подходящем выборе m и α сумма $V - \alpha w$ будет положительно определенной, а ее производная $\dot{V} - \alpha\dot{w}$ — определенно отрицательной.

Покажем как распространить этот результат на случай $s > 1$. Рассмотрим M_i при некотором фиксированном значении i. Опять воспользуемся леммой 2 и представим систему (1) в виде (3), опуская индекс i при f_M и f_N, и введем обозначение $\widetilde{\varphi}_i = (\nabla\varphi_i, f_N)$ при $x \in M_i$. Рассмотрим выражение

$$w_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, m) = (\tilde{\varphi}_i, \varphi_i)\tilde{\varphi}_i^{2m} \prod_{j \neq i} \varphi_j^2, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p. \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть V — функция Ляпунова для системы* (1), *производная которой $\dot{V}(x) = 0$ при $x \in M_j$, $j = \overline{1,p}$, а множества M_j задаются уравнениями $\varphi_j = 0$ и не содержат целых полутраекторий. Тогда выражение* (5) *при соответствующем выборе m удовлетворяет следующим условиям:*

1) $V + w_i > 0$ при $x \neq 0$;

2) $\dot{V} + \dot{w}_i < 0$ при $\varphi_i(x) = 0$, $\dot{\varphi}_i(x) \neq 0$, $\varphi_j(x) \neq 0$ для любого $j \neq i$, $1 \leqslant j \leqslant p$;

3) $\dot{V} + \dot{w}_i = 0$, если $\varphi_j(x) = 0$ при некотором $j \neq i$, или если $\dot{\varphi}_i(x) = 0$ при $x \in M_i$;

4) $\dot{V} + \dot{w}_i < 0$ при $x \notin M$.

В случае, когда $s > 1$, т. е. множеств M_i больше одного, для построения дополнительной функции можно использовать сумму w_i, построенных для каждого из множеств M_i. Обозначим выбранные согласно теореме 3 для каждого множества M_i числа m через m_i^* и рассмотрим выражение

$$W = W(V, \varphi_1, \ldots, \varphi_p) = V - \alpha \sum_{i=1}^{p} w_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, m_i^*). \tag{6}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда функция* (6) *при подходящем выборе α положительно определена, а ее производная строго меньше нуля всюду, кроме множеств $\{x\colon \varphi_i(x) = 0, \varphi_j(x) = 0, i \neq j\}$, и $\{x\colon \varphi_i(x) = 0, \dot{\varphi}_i(x) = 0\}$.*

Заметим, что множитель $\prod\limits_{j \neq i} \varphi_j$ заставляет w_i обращаться в нуль на множествах M_j, $j \neq i$, и позволяет гарантировать знакопостоянство суммы $\dot{V} + \dot{w}_i$ на M_j, $j \neq i$: $\dot{V}$ обращается в нуль на M_j, а производная $\widetilde{\varphi}_i^{2m}(\widetilde{\varphi}_i, \varphi_i)$ на M_j при $j \neq i$ имеет достаточно сложный вид и может в общем случае принимать значения любого знака.

Производная функции $W(V, \varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ будет обращаться в нуль в тех точках x, в которых $\varphi_i(x) = 0$ и $\varphi_j(x) = 0$ для некоторых i и j, либо $\varphi_i(x) = 0$ и $\dot{\varphi}_i(x) = 0$. Обозначим

$$V_{11} = W(V, \varphi_1, \ldots, \varphi_s)$$

и обратим внимание, что функция V_{11} является положительно определенной, а ее производная — отрицательно постоянной, обращаясь в нуль на некотором подмножестве исходного множества M, т. е. задача для V_{11} сходна с исходной задачей. Покажем, что это действительно так и что последовательным вычислением функций W можно получить функцию со знакоопределенной производной.

4. Особые случаи. Для дальнейших построений удобным будет ввести краткое обозначение для следующей операции. Пусть $g_1(x) = (g_{11}(x), g_{12}(x), \ldots, g_{1p}(x))$ и $g_2(x) = (g_{21}(x), g_{22}(x), \ldots, g_{2q}(x))$ — две вектор-функции. Из множества $\{g_{11}, \ldots, g_{1p}, g_{21}, \ldots, g_{2q}\}$

выберем максимальное функционально независимое подмножество, и обозначим через $\langle g_1, g_2 \rangle$ вектор-функцию, составленную из элементов этого подмножества. Другими словами,

$$g = \langle g_1, g_2 \rangle = (g_{1i_1}, g_{1i_2}, \ldots, g_{2j_1}, g_{2j_2}, \ldots),$$

где индексы i_1, $i_2, \ldots$ и j_1, $j_2, \ldots$ выбираются так, чтобы уравнение $g(x) = 0$ и система $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$ оставались эквивалентными, а размерность вектора g была минимальной. Аналогично определим обозначения для большего числа вектор-функций: $\langle g_1, g_2, g_2 \rangle = \langle \langle g_1, g_2 \rangle, g_3 \rangle$, $\langle g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle = \langle \langle g_1, g_2, g_3 \rangle, g_4 \rangle$ и т. д.

Возвращаясь к задаче для V_{11}, рассмотрим сначала случай, когда $\varphi_i(x) = 0$ и $\varphi_j(x) = 0$ при некоторых $x \neq 0$, что соответствует пересечению M_i и M_j в отличных от нуля точках. Построим функции $\varphi_{ij}^{(2)} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$. Такие функции определяют множества

$$M_{ij}^2 = \{x \colon \varphi_{ij}^{(2)}(x) = 0\} = M_i \cap M_j.$$

Перенумеруем $\varphi_{ij}^{(2)}$ последовательно, исключая зависимые функции: $\varphi_k^{(2)} = \varphi_{ij}^{(2)}$, $k = \overline{1, s_2}$. Построим

$$V_{12} = W(V_{11}, \varphi_1^{(2)}, \ldots, \varphi_{s_2}^{(2)}). \tag{7}$$

Производная V_{12} может обращаться в нуль, если найдутся точки x такие, что $\varphi_i^{(2)}(x) = 0$ и $\varphi_j^{(2)}(x) = 0$ одновременно при некоторых i и j. В таком случае построим аналогичным образом $\varphi^{(3)} = \langle \varphi_i^{(2)}, \varphi_j^{(2)} \rangle$,

$$V_{13} = W(V_{12}, \varphi_1^{(3)}, \ldots, \varphi_{s_3}^{(3)}),$$

затем, при наличии точек, в которых $\varphi_i^{(3)}(x) = 0$ и $\varphi_j^{(3)}(x) = 0$, V_{14} и т. д.

Покажем, что потребуется построить не более n функций V_{1i}. Действительно, согласно построению, размерность $\varphi_{ij}^{(k)}$ строго больше размерности как $\varphi_i^{(k-1)}$, так и $\varphi_j^{(k-1)}$. Следовательно, при некотором k размерность $\varphi^{(k+1)}$ станет равной n и уравнение

$$\varphi_{ij}^{(k+1)}(x) = 0$$

заведомо будет задавать единственную точку $x = 0$.

Таким образом, за конечное число шагов будет построена функция V_1, производная которой будет обращаться в нуль только в точках x: $\varphi_i(x) = 0$, $\dot{\varphi}_i(x) = 0$.

Переходя к случаю $\varphi_i(x) = 0$, $\dot{\varphi}_i(x) = 0$, введем функции

$$\psi_i^{(2)} = \langle \varphi_i, \dot{\varphi}_i \rangle \tag{8}$$

для всех i, для которых $\varphi_i(x) = 0$ и $\dot{\varphi}_i(x) = 0$ возможно при $x \neq 0$. Построим функцию

$$V_2 = W(V_1, \psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}, \ldots, \psi_{r_2}^{(2)}), \tag{9}$$

учитывая при необходимости случаи, когда $\psi_i^{(2)}(x) = 0$ и $\psi_j^{(2)}(x) = 0$ выполняются одновременно при $x \neq 0$, указанным выше образом. Согласно (6) производная V_2 обращается в нуль в тех точках, где $\dot{\psi}_i^{(2)}(x) = 0$ для некоторых i, или, учитывая (8), где $\dot{\varphi}_i(x) = 0$ и $\ddot{\varphi}_i(x) = 0$ одновременно. Если такие точки найдутся, построим

$$\psi_i^{(3)} = \langle \varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i \rangle,$$

затем с их помощью получим $V_3 = W(V_2, \psi_1^{(3)}, \ldots, \psi_{r_3}^{(3)})$ и т. д.

Обратим внимание, что производная функции V_k будет обращаться в нуль в тех точках x, в которых $\dot{\psi}_i^{(k)}(x) = 0$, или $\dot{\varphi}_i(x) = 0$, $\ddot{\varphi}_i(x) = 0, \ldots, \varphi_i^{(k+1)}(x) = 0$. Согласно лемме 1 для любой точки $x \in M$, $x \neq 0$ найдется $k \leqslant l < n$ такое, что $\dot{\varphi}(x) = \cdots = \varphi^{(k-1)}(x) = 0$, $\varphi^k(x) \neq 0$. Следовательно, для функции V_l заведомо не найдется точек $x \neq 0$ таких, что $\dot{\psi}_i^l(x) = 0$.

Учитывая структуру (6), (7), (9), отметим что построенная в результате функция будет иметь вид

$$V_l = V - \sum_i \alpha_i w_i(g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{ik_i}, m_i),$$

где w_i определяется формулой (5), а уравнения $g(x) = 0$ задают некоторые подмножества исходного множества M.

Таким образом, для систем, удовлетворяющих условиям теоремы Барбашина–Красовского, получено явное выражение функции Ляпунова со знакоопределенной производной. Процесс построения этой функции состоит в получении дополнительных функций, добавление которых к исходной функции Ляпунова последовательно сужает множество обращения в нуль ее производной от исходного M до нулевой точки, сохраняя знакоопределенность самой функции и ее производной в остальных точках. Дополнительная функция строится с использованием метода инвариантных соотношений в виде суммы членов, соответствующих множествам вида $\{x \colon \varphi(x) = 0\}$. Процесс построения продолжается до тех пор, пока производная полученной функции не станет знакоопределенной; показано, что это произойдет за конечное число шагов.

1. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. – Москва: Наука, 1970. – 240 с.
2. *Харламов П. В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
3. *Ковалев А. М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266–272.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 23.05.2008