Легко бачити, що врахування у виразі (16) виключно локального доданку $x_{\rm loc}(z)$ можливо лише у випадку, коли зміна зовнішнього поля на відстанях порядку "дії" $F_s(z, z_1, \ldots, z_{s-1})$ мала, тобто коли система знаходиться далеко від критичних точок (наведені кореляційні функції короткодіючі), і градієнти зовнішнього поля малі.

1. *Монстер А.* Химическая термодинамика. – Москва: Мир, 1971. – 296 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. – Москва: Наука, 1964. – 587 с.
3. *Lebowitz J. L., Percus J. K.* Statistical thermodynamics of nonuniform fluids // J. Math. Phys. – 1963. – **4 (1)**. – P. 116–123.
4. *Булавин Л. А, Гаврюшенко Д. А., Сысоев В. М.* Химический потенциал системы во внешнем поле // Доп. НАН України. – 1997. – № 2. – С. 79–83.
5. *Булавин Л. А, Гаврюшенко Д. А., Сысоев В. М.* Плотность неоднородной жидкости во внешнем поле // Там само. – 1997. – № 7. – С. 111–114.
6. *Булавин Л. А, Гаврюшенко Д. А., Сысоев В. М.* Профиль плотности флюида в плоскопараллельной поре с неидеальными стенками в гравитационном поле // Журн. физ. химии. – 2004. – **78**. – С. 2039. – 2042.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 18.05.2007

УДК 535.36

Д. В. Петров

Применение Sh-матриц в задачах рассеяния света

(Представлено академиком НАН Украины Л.Н. Литвиненко)

A modification of the method of T-matrices with the use of the so-called Sh-matrices is proposed and applied to solving the problem of light scattering by an elongated spheroid.

Современные задачи рассеяния электромагнитных волн часто решаются с помощью метода T-матриц [1–4]. В принципе этот метод может применяться для изучения рассеяния объектами произвольной формы. Однако для частиц таких форм расчеты довольно сложны и требуют больших затрат компьютерного времени на оценку двойного интеграла по поверхности рассеивающей частицы [3], поэтому нахождение аналитических выражений для вычисления элементов T-матриц — очень важная задача. Аналитические выражения для элементов T-матрицы получены в работе [4] для сферического рассеивателя. Наш подход дает возможность получать аналитические решения для более сложных форм, что серьезно упрощает вычисления и позволяет производить эффективное усреднение рассеивающих свойств ансамбля частиц как по размерному параметру $X = 2\pi r/\lambda$ (здесь r — некий характерный размер частицы, λ — длина волны падающего света), так и по показателю преломления m_0.

Матрицы формы и *T*-матрицы. Основная идея метода T-матриц заключается в разложении падающего и рассеянного поля в ряд по векторным сферическим волновым функциям [1, 2, 4]:

$$\mathbf{E}^{\mathrm{inc}}(\rho,\gamma,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}[a_{mn}\,\mathrm{Rg}\,\mathbf{M}_{mn}(\rho,\gamma,\phi)+b_{mn}\,\mathrm{Rg}\,\mathbf{N}_{mn}(\rho,\gamma,\phi)], \tag{1}$$

$$\mathbf{E}^{\mathrm{sca}}(\rho,\gamma,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}[p_{mn}\mathbf{M}_{mn}(\rho,\gamma,\phi)+q_{mn}\mathbf{N}_{mn}(\rho,\gamma,\phi)], \tag{2}$$

где $\mathrm{Rg}\,\mathbf{M}_{mn}(\rho,\gamma,\phi)$, $\mathrm{Rg}\,\mathbf{N}_{mn}(\rho,\gamma,\phi)$, $\mathbf{M}_{mn}(\rho,\gamma,\phi)$, $\mathbf{N}_{mn}(\rho,\gamma,\phi)$ и a_{mn}, b_{mn}, p_{mn}, q_{mn} — векторные сферические волновые функции и соответствующие им коэффициенты разложения, соответственно; ρ — расстояние от центра системы координат; γ и ϕ — полярный и азимутальный угол, соответственно, в сферической системе координат с началом в центре частицы [3]; эти координаты характеризуют геометрию светорассеяния. Функции $\mathrm{Rg}\,\mathbf{M}_{mn}(\rho,\gamma,\phi)$ и $\mathrm{Rg}\,\mathbf{N}_{mn}(\rho,\gamma,\phi)$ конечны в точке начала координат. Явные выражения для векторных сферических волновых функций приведены, например, в работе [4]. Коэффициенты разложения рассеянного поля p_{mn}, q_{mn} связаны с коэффициентами разложения падающего поля a_{mn}, b_{mn} с помощью соотношений, следующих из линейности уравнений Максвелла

$$p_{mn}=\sum_{n'=1}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'}[T^{11}_{mnm'n'}a_{m'n'}+T^{12}_{mnm'n'}b_{m'n'}], \tag{3}$$

$$q_{mn}=\sum_{n'=1}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'}[T^{21}_{mnm'n'}a_{m'n'}+T^{22}_{mnm'n'}b_{m'n'}]. \tag{4}$$

Матрица, связывающая эти два набора коэффициентов, называется Т-матрицей:

$$\mathbf{T}_{mnm'n'}=\begin{pmatrix}T^{11}_{mnm'n'} & T^{12}_{mnm'n'}\\ T^{21}_{mnm'n'} & T^{22}_{mnm'n'}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Можно показать [4], что Т-матрица может быть вычислена с помощью следующих соотношений:

$$\mathbf{T}_{mnm'n'}=-(\mathrm{Rg}\,\mathbf{Q}_{mnm'n'})(\mathbf{Q}_{mnm'n'})^{-1}. \tag{6}$$

Здесь матрицы $\mathrm{Rg}\,\mathbf{Q}_{mnm'n'}$ и $\mathbf{Q}_{mnm'n'}$ задаются выражениями

$$\mathrm{Rg}\,\mathbf{Q}_{mnm'n'}=\begin{pmatrix}\mathrm{Rg}\,Q^{11}_{mnm'n'} & \mathrm{Rg}\,Q^{12}_{mnm'n'}\\ \mathrm{Rg}\,Q^{21}_{mnm'n'} & \mathrm{Rg}\,Q^{22}_{mnm'n'}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{Q}_{mnm'n'}=\begin{pmatrix}Q^{11}_{mnm'n'} & Q^{12}_{mnm'n'}\\ Q^{21}_{mnm'n'} & Q^{22}_{mnm'n'}\end{pmatrix}, \tag{7}$$

причем

$$\begin{bmatrix} Q^{11}_{mnm'n'} \\ Q^{12}_{mnm'n'} \\ Q^{21}_{mnm'n'} \\ Q^{22}_{mnm'n'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i(m_0 J^{21}_{mnm'n'} + J^{12}_{mnm'n'}) \\ -i(m_0 J^{11}_{mnm'n'} + J^{22}_{mnm'n'}) \\ -i(m_0 J^{22}_{mnm'n'} + J^{11}_{mnm'n'}) \\ -i(m_0 J^{12}_{mnm'n'} + J^{21}_{mnm'n'}) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Rg} Q^{11}_{mnm'n'} \\ \operatorname{Rg} Q^{12}_{mnm'n'} \\ \operatorname{Rg} Q^{21}_{mnm'n'} \\ \operatorname{Rg} Q^{22}_{mnm'n'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i(m_0 \operatorname{Rg} J^{21}_{mnm'n'} + \operatorname{Rg} J^{12}_{mnm'n'}) \\ -i(m_0 \operatorname{Rg} J^{11}_{mnm'n'} + \operatorname{Rg} J^{22}_{mnm'n'}) \\ -i(m_0 \operatorname{Rg} J^{22}_{mnm'n'} + \operatorname{Rg} J^{11}_{mnm'n'}) \\ -i(m_0 \operatorname{Rg} J^{12}_{mnm'n'} + \operatorname{Rg} J^{21}_{mnm'n'}) \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где

$$\begin{bmatrix} J^{11}_{mnm'n'} \\ J^{12}_{mnm'n'} \\ J^{21}_{mnm'n'} \\ J^{22}_{mnm'n'} \end{bmatrix} = (-1)^m \iint_S dS\mathbf{n}(r,\theta,\varphi) \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{Rg} \mathbf{M}_{m'n'}(m_0 r,\theta,\varphi) \times \mathbf{M}_{-mn}(r,\theta,\varphi) \\ \operatorname{Rg} \mathbf{M}_{m'n'}(m_0 r,\theta,\varphi) \times \mathbf{N}_{-mn}(r,\theta,\varphi) \\ \operatorname{Rg} \mathbf{N}_{m'n'}(m_0 r,\theta,\varphi) \times \mathbf{M}_{-mn}(r,\theta,\varphi) \\ \operatorname{Rg} \mathbf{N}_{m'n'}(m_0 r,\theta,\varphi) \times \mathbf{N}_{-mn}(r,\theta,\varphi) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Rg} J^{11}_{mnm'n'} \\ \operatorname{Rg} J^{12}_{mnm'n'} \\ \operatorname{Rg} J^{21}_{mnm'n'} \\ \operatorname{Rg} J^{22}_{mnm'n'} \end{bmatrix} = (-1)^m \iint_S dS\mathbf{n}(r,\theta,\varphi) \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{Rg} \mathbf{M}_{m'n'}(m_0 r,\theta,\varphi) \times \operatorname{Rg} \mathbf{M}_{-mn}(r,\theta,\varphi) \\ \operatorname{Rg} \mathbf{M}_{m'n'}(m_0 r,\theta,\varphi) \times \operatorname{Rg} \mathbf{N}_{-mn}(r,\theta,\varphi) \\ \operatorname{Rg} \mathbf{N}_{m'n'}(m_0 r,\theta,\varphi) \times \operatorname{Rg} \mathbf{M}_{-mn}(r,\theta,\varphi) \\ \operatorname{Rg} \mathbf{N}_{m'n'}(m_0 r,\theta,\varphi) \times \operatorname{Rg} \mathbf{N}_{-mn}(r,\theta,\varphi) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

В этих соотношениях форма частицы описывается функцией $R = R(\theta,\varphi)$ в сферической системе координат; θ — полярный угол и φ — азимутальный угол.

Матрица $\mathbf{T}_{mnm'n'}$ зависит только от физических и геометрических характеристик рассеивающей частицы, таких как размерный параметр, форма, относительный показатель преломления, и не зависит от геометрии освещения/наблюдения и состояния поляризации падающего света. Это значит, что эта матрица вычисляется один раз, а затем используется для любой геометрии освещения/наблюдения и состояния поляризации падающего света. Мы предлагаем развитие этого подхода. Нам удалось разделить влияния формы частицы и ее физических параметров, таких как размерный параметр X и показатель преломления m_0. Соотношения для $\operatorname{Rg} J^{11}_{mnm'n'}$, например, выглядят так (см., также, [3]):

$$\operatorname{Rg}J^{11}_{mnm'n'}(X,m_0) = X^{n+n'+2}(m_0)^{n'} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(Xm_0)^{2k_1}}{k_1!\Gamma\left(n'+k_1+\dfrac{3}{2}\right)} \times$$

$$\times \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(X)^{2k_2}}{k_2!\Gamma\left(n+k_2+\dfrac{3}{2}\right)} \operatorname{RgSh}^{11}_{mnm'n',k_1+k_2}, \tag{11}$$

где RgSh^{11} — матрица формы, зависящая лишь от формы частицы. Матрицы формы (Sh-матрицы), могут быть найдены из соотношений, аналогичных соотношению для элемента RgSh^{11}:

$$\mathrm{RgSh}^{11}_{mnm'n'k} = -i\pi\frac{(-1)^{m'-m+k}}{2^{2k+n'+n+2}}A_{nn'}\int\limits_0^\pi d\theta\Biggl\{\sin\theta[\pi_{m'n'}(\theta)\tau_{mn}(\theta)+\pi_{mn}(\theta)\tau_{m'n'}(\theta)]\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\exp[i\varphi(m'-m)](R_0)^{2k+n+n'+2}\Biggr\}, \qquad (12)$$

где $R_0 = R(\theta,\varphi)/X$. Как видно, Sh-матрицы зависят от двойного интеграла, взятого по поверхности частицы. Его вычисление с нужной точностью — задача непростая. Однако для частиц некоторых форм интегралы могут быть найдены аналитически.

Рассмотрим в качестве рассеивающего объекта вытянутый сфероид, ось вращения которого ориентирована вдоль полярной оси нашей системы координат, длина этой оси — a, длина перпендикулярной оси — b (все размеры выражены в единицах размерного параметра). Обращаем внимание, что для вытянутого сфероида $b \leqslant a$. Центр системы координат находится посредине оси вращения. В этой системе координат форма сплюснутого сфероида может быть описана следующей функцией:

$$R_0(\theta,\varphi) = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2(\cos\theta)^2}}, \qquad (13)$$

где $\varepsilon = \sqrt{1-b^2/a^2}$ — эксцентриситет эллипса, лежащего в поперечном сечении сфероида плоскостью, содержащей ось вращения сфероида a. У этого эллипса длина большей полуоси равна a и малая полуось имеет длину b. Элемент RgSh^{11} описывается следующим соотношением:

$$\mathrm{RgSh}^{11}_{mnm'n'k} = -i\pi^2\frac{(-1)^{m'-m+k}}{2^{2k+n'+n+1}}A_{nn'}\delta_{mm'}b^{2k+n+n'+2}I^{(1)}_{mnm'n'}\left(k+\frac{n+n'+2}{2}\right), \qquad (14)$$

$$I^{(1)}_{mnm'n'}(z) = m\left[\frac{n'\sqrt{(n'+1)^2-m'^2}}{2n'+1}I^{(\theta)}_{mnm'n'+1}(z)-\frac{(n'+1)\sqrt{n'^2-m'^2}}{2n'+1}I^{(\theta)}_{mnm'n'-1}(z)\right]+$$

$$+\,m'\left[\frac{n\sqrt{(n+1)^2-m^2}}{2n+1}I^{(\theta)}_{mn+1m'n'}(z)-\frac{(n+1)\sqrt{n^2-m^2}}{2n+1}I^{(\theta)}_{mn-1m'n'}(z)\right], \qquad (15)$$

$$I^{(\theta)}_{mnm'n'}(z) = (-1)^{n+n'}\Xi_m\Xi_{m'}n!\sqrt{(n-|m|)!(n+|m|)!}n'!\sqrt{(n'-|m'|)!(n'+|m'|)!}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-|m|}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(n-|m|-k)!(|m|+k)!}\times$$

$$\times\sum_{k'=0}^{n'-|m'|}\frac{(-1)^{k'}}{k'!(n'-k')!(n'-|m'|-k')!(|m'|+k')!}\times$$

$$\times \sum_{k''=0}^{\infty} \frac{\Gamma(z+k'')\varepsilon^{2k''}}{\Gamma(z)\Gamma(k''+1)} \sum_{k'''=0}^{k''} C_{k'''}^{k''}(-4)^{k'''} \times$$

$$\times I(2n-2k-|m|+2n'-2k'-|m'|-1+2k''', 2k+|m|+2k'+|m'|-1+2k'''), \quad (16)$$

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{\alpha}(\sin(\theta))^{\beta} d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}. \quad (17)$$

Аналогично можно получить выражения и для других Sh-матриц.

1. *Tsang L., Kong J., Shin R.* Theory of microwave remote sensing. — New York: Wiley, 1985. — 603 p.
2. *Mishchenko M. I., Travis L. D., Mackowski D. W.* T-matrix computations of light scattering by nonspherical particles: a review // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. — 1996. — **55**. — P. 535–575.
3. *Petrov D., Synelnyk E., Shkuratov Yu., Videen G.* The T-matrix technique for calculations of scattering properties of ensembles of randomly oriented particles with different size // Ibid. — 2006. — **102**. — P. 85–110.
4. *Mishchenko M. I., Travis L. D., Lacis A. A.* Scattering, absorption and emission of light by small particles. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002. — 690 p.

НИИ астрономии Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 12.06.2007