ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2008

ТЕПЛОФIЗИКА

УДК 532.536

А. А. Авраменко, член-корреспондент НАН Украины **Б. И. Басок,**
А. В. Кузнецов, А. И. Тыринов

Турбулентная биоконвекция

The problems concerning the processes of turbulent bioconvection are considered. These processes are typical of technologies of microbiological and other industries. On a basis of the renormalization group approach, the expressions for the turbulent diffusion constant are obtained.

В различных технологических процессах микробиологической, фармакологической и пищевой промышленностей широко применяются аппараты и устройства, использующие принцип ДИВЭ (дискретно-импульсного ввода энергии). Основы теории ДИВЭ разработаны в Институте технической теплофизики НАН Украины [1]. В частности, процессы ДИВЭ нашли применение в технологиях ферментации, которые сопровождаются интенсивным биоконвективным движением жидкой среды.

Биоконвекция — это движение жидкой среды, обусловленное направленным потоком микроорганизмов, приводящим к перераспределению плотности среды. В результате этого возникают гидродинамические процессы в среде, подобные процессам естественной конвекции при наличии температурных градиентов. Количество самодвижущихся микроорганизмов в одном кубическом сантиметре может быть очень большим — 10^7 для режима с низкой концентрацией микроорганизмов (когда взаимодействием между отдельными микроорганизмами можно пренебречь) и 10^{11} — для турбулентного режима, когда микроорганизмы практически плотно упакованы. В последнем случае картина течения носит сложный характер, при котором статистические параметры потока подобны турбулентным пульсациям. Этот эффект называется низкорейнольдсовой турбулентностью, так как характерные числа Рейнольдса довольно малы [2–5].

Другая интересная особенность состоит в том, что в случае турбулентного режима движение микроорганизмов происходит в очень тонком слое и поэтому почти двумерно. Это противоречит традиционному пониманию, что турбулентность — это трехмерное явление. В настоящее время все теоретические попытки моделирования этого процесса были ограничены феноменологическими моделями [6, 7]. Поэтому исследователи все еще очень далеки от понимания этого процесса. Понимание такого типа явлений может изменять некоторые традиционные представления природы турбулентности.

В настоящей работе авторы попытались построить модель турбулентного массопереноса при биоконвекции на основе ренормализационно-группового анализа [8], абстрагируясь от феноменологического (эмпирического) подхода.

Исходное уравнение массопереноса имеет следующий вид [9]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \chi_0 \nabla^2\right) n + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x_m}[n(u_m + W s_m)] = 0, \tag{1}$$

где t — время; u_m — компоненты скорости, соответствующие координатам x_m; χ_0 — коэффициент диффузии микроорганизмов; n — концентрация микроорганизмов, s_m — проекция единичного вектора направления движения микроорганизмов; W — средняя скорость движения микроорганизмов относительно жидкости (предполагается, что W является постоянной величиной); λ_0 — параметр возмущения.

Процедуру перенормировки удобно проводить в пространстве волновых чисел и частоты. Поэтому необходимо "перевести" в это пространство уравнение (1). Это можно сделать с помощью комплексного преобразования Фурье [10]. Фурье-образы слагаемых в уравнении (1) имеют вид:

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\limits_{\kappa \leqslant \kappa_c} d^d\kappa \int d\omega U_m(\vec{\kappa}, \omega) \exp(i\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t), \\ n &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\limits_{\kappa \leqslant \kappa_c} d^d\kappa \int d\omega N(\vec{\kappa}, \omega) \exp(i\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t), \\ s_m &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\limits_{\kappa \leqslant \kappa_c} d^d\kappa \int d\omega S_m(\vec{\kappa}, \omega) \exp(i\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\vec{x}$ — вектор координаты точки; κ — волновое число; $\vec{\kappa}$ — вектор волнового числа; ω — частота; d — размерность пространства. В образах (2) κ_c представляет собой величину ультрафиолетового обрезания в пространстве волновых чисел. Подставив эти выражение в (1), получим

$$G_0^{-1}(\kappa) N(\vec{\kappa}, \omega) = -i\lambda_0 \kappa_m \int\limits_{\kappa \leqslant \kappa_c} \frac{d^d \upsilon}{(2\pi)^d} \int \frac{d\varpi}{2\pi} [U_m(\vec{\upsilon}, \omega) N(\vec{\kappa} - \vec{\upsilon}, \omega - \varpi) +$$
$$+ W S_m(\vec{\upsilon}, \omega) N(\vec{\kappa} - \vec{\upsilon}, \omega - \varpi)],$$

где $G_0 = (-i\omega + \chi_0\kappa^2)^{-1}$ — пропагатор нулевого порядка, символический параметр λ_0 введен для удобства при построении теории возмущений. В окончательном результате следует принять $\lambda_0 = 1$.

Перейдем к непосредственной процедуре ренормализационного анализа, основы которой разработаны в работе [8]. Согласно идеологии этой работы, данная процедура включает два этапа:

1) разбиение полей искомых величин на медленную и быструю части

$$U(\vec{\kappa}, \omega) = \begin{cases} U^{<}(\vec{\kappa}, \omega), & 0 < \kappa < \kappa_c \exp(-\tau), \\ U^{>}(\vec{\kappa}, \omega), & \kappa_c \exp(-\tau) < \kappa < \kappa_c, \end{cases}$$

$$N(\vec{\kappa},\omega)=\begin{cases} N^{<}(\vec{\kappa},\omega), & 0<\kappa<\kappa_c\exp(-\tau),\\ N^{>}(\vec{\kappa},\omega), & \kappa_c\exp(-\tau)<\kappa<\kappa_c,\end{cases}$$

$$S(\vec{\kappa},\omega)=\begin{cases} S^{<}(\vec{\kappa},\omega), & 0<\kappa<\kappa_c\exp(-\tau),\\ S^{>}(\vec{\kappa},\omega), & \kappa_c\exp(-\tau)<\kappa<\kappa_c\end{cases}$$

с последующим исключением высокочастотных мод путем решения уравнения для них и подстановкой полученного решения в уравнение для медленных мод;

2) перенормировка N и κ_c таким образом, чтобы вновь полученное уравнение выглядело как исходное уравнение движения (1). На этом этапе производится ренормализация коэффициентов переноса (эффективной диффузии).

Согласно данной идеологии, необходимо исключить быстрые моды из уравнения для медленных мод, используя ряды по λ_0 для быстрых мод. Это дает

$$G_0^{-1}(\kappa)N^{<}(\widetilde{\kappa})=-i\kappa_m\lambda_0\int\limits_{\kappa\leqslant\kappa_c}\frac{d^{d+1}\widetilde{\upsilon}}{(2\pi)^{d+1}}[U^{<}(\widetilde{\upsilon})N^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\upsilon})+WS^{<}(\widetilde{\upsilon})N^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\upsilon})]-$$

$$-i\kappa_m\lambda_0^2\int\limits_{\kappa\leqslant\kappa_c}\frac{d^{d+1}\widetilde{\upsilon}}{(2\pi)^{d+1}}[\underbrace{U_0^{>}(\widetilde{\upsilon})N_1^{>}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\upsilon})}_{\mathrm{I}}+\underbrace{WS_0^{>}(\widetilde{\upsilon})N_1^{>}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{\upsilon})}_{\mathrm{II}}]. \tag{3}$$

При анализе слагаемого I необходимо учитывать, что быстрые нулевые моды связаны с быстрыми модами случайной силы соотношением [8]

$$U_0^{>}(\widetilde{\kappa})=g_0(\widetilde{\kappa})F^{>}(\widetilde{\kappa}),$$

где $g_0=(-i\omega+\nu_0\kappa^2)^{-1}$ — пропагатор нулевого порядка для уравнения Навье–Стокса. Кроме того, следует учитывать выражение для корреляции случайных сил, предложенное в [11],

$$\overline{F_l(\vec{\kappa},\omega)F_m(\vec{\kappa}',\omega')}=\frac{2(2\pi)^{d+1}}{\kappa^{d-4+\varepsilon}}D_0M_{lm}(\vec{\kappa})\delta(\vec{\kappa}+\vec{\kappa}')\delta(\omega+\omega'),$$

а также свойство дельта-функции. В этой формуле D_0 — величина, пропорциональная скорости диссипации; ε — постоянный параметр, равный четырем; $M_{ml}=\delta_{mnl}-(\kappa_m\kappa_l)/\kappa^2$.

Далее необходимо определить, что такое быстрые моды угла движения микроорганизмов. В работе [8] показано, что при вертикальном движении микроорганизмов возмущенный вектор движения этих микроорганизмов определяется по формуле

$$\vec{s}'=(B\zeta,-B\xi,0), \tag{4}$$

где $B=6\dfrac{\rho}{\rho_m}\dfrac{\mu}{2\rho gh}=\alpha_\perp\dfrac{\mu}{2\rho gh}$ (ρ_m — плотность микроорганизма; h — смещение центра масс микроорганизма относительно его центра плавучести). Компоненты вектора (4) определяются по формулам

$$\begin{aligned}\zeta&=-(1-\alpha_0)\frac{\partial w'}{\partial x}+(1+\alpha_0)\frac{\partial u'}{\partial z},\\ \xi&=(1-\alpha_0)\frac{\partial w'}{\partial y}-(1+\alpha_0)\frac{\partial v'}{\partial z}.\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь x и y — координатные оси в горизонтальной плоскости; z — вертикальная ось; u, v и w — компоненты скорости, соответствующие осям x, y и z. Штрих около компонент скорости показывает, что это возмущенные компоненты, т. е. их можно рассматривать как быстрые моды скорости.

Формулы (5) получены в предположении, что микроорганизмы имеют форму эллипсоида, α_0 представляет собой эксцентриситет, который вычисляется по соотношению

$$\alpha_0 = \frac{b_{\max}^2 - b_{\min}^2}{b_{\max}^2 + b_{\min}^2},$$

где $b_{\max}$ — большая полуось микроорганизма, который имеет форму эллипсоида; $b_{\min}$ — малая полуось.

Вычисления производятся в предположении, что возмущенный вектор соответствует быстрым модам.

Результаты интегрирования по частоте и волновым числам дает

$$-i\kappa_m\lambda_0^2 \int\limits_{\kappa\leqslant\kappa_c} \frac{d^{d+1}\widetilde{v}}{(2\pi)^{d+1}} [\underbrace{U_0^{>}(\widetilde{v})N_1^{>}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{v})}_{\mathrm{I}}] = -\kappa^2\frac{d-1}{d}\frac{S_d D_0}{(2\pi)^d}\frac{\lambda_0^2 N^{<}(\widetilde{\kappa})}{(\chi_0+\nu_0)\nu_0\kappa_c^{\varepsilon}}\frac{\exp(\tau\varepsilon)-1}{\varepsilon}, \tag{6}$$

$$-i\kappa_m\lambda_0^2 \int\limits_{\kappa\leqslant\kappa_c} \frac{d^{d+1}\widetilde{v}}{(2\pi)^{d+1}} [\underbrace{WS_0^{>}(\widetilde{v})N_1^{>}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{v})}_{\mathrm{II}}] = -\delta_{ml}\kappa^2\frac{2D_0\lambda_0^2 S_d}{(2\pi)^d d}W^2B^2\frac{\lambda_0^2 N^{<}(\widetilde{\kappa})}{(\chi_0+\nu_0)\nu_0}\times$$
$$\times\frac{\exp[\tau(\varepsilon-2)]-1}{(\varepsilon-2)\kappa_c^{\varepsilon-2}}\left\{(1+\alpha_0^2)\left[\frac{d+1}{d+2}\delta_{rh}\delta_{pt}-\frac{1}{d+2}(\delta_{rp}\delta_{ht}+\delta_{rt}\delta_{hp})\right]-\right.$$
$$\left.-(1-\alpha_0^2)\left[\frac{d+1}{d+2}\delta_{ph}\delta_{rt}-\frac{1}{d+2}(\delta_{pr}\delta_{ht}+\delta_{pt}\delta_{hr})\right]\right\}. \tag{7}$$

Преобразуем (3), учитывая соотношения (6) и (7). В результате имеем ренормализованное уравнение диффузии:

$$G^{-1}(\kappa)N^{<}(\widetilde{\kappa}) = -i\kappa_m\lambda_0 \int\limits_{\kappa\leqslant\kappa_c} \frac{d^{d+1}\widetilde{v}}{(2\pi)^{d+1}}[U_m^{<}(\widetilde{v})N^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{v}) + WS_m^{<}(\widetilde{v})N^{<}(\widetilde{\kappa}-\widetilde{v})], \tag{8}$$

где $G = [-i\omega + (\chi_0+\Delta\chi)\kappa^2]^{-1}$. Как видно, ренормализованное уравнение диффузии отличается от исходного (3) тем, что пропагатор уравнения (8) включает ренормализованное значение коэффициента диффузии

$$\chi = \chi_0 + \Delta\chi = \chi_0 + = \frac{d-1}{d}\frac{S_d D_0}{(2\pi)^d}\frac{\lambda_0^2}{(\chi_0+\nu_0)\nu_0\kappa_c^{\varepsilon}}\left(\frac{\exp(\tau\varepsilon)-1}{\varepsilon}+\right.$$
$$+2\delta_{ml}\frac{W^2B^2}{d-1}\frac{\exp[\tau(\varepsilon-2)]-1}{(\varepsilon-2)\kappa_c^{-2}}\left\{(1+\alpha_0^2)\left[\frac{d+1}{d+2}\delta_{rh}\delta_{pt}-\frac{1}{d+2}(\delta_{rp}\delta_{ht}+\delta_{rt}\delta_{hp})\right]-\right.$$
$$\left.\left.-(1-\alpha_0^2)\left[\frac{d+1}{d+2}\delta_{ph}\delta_{rt}-\frac{1}{d+2}(\delta_{pr}\delta_{ht}+\delta_{pt}\delta_{hr})\right]\right\}\right).$$

Продифференцируем это выражение по τ в пределе $\tau \to 0$, учитывая бесконечно малое значение шага ренормализации. В результате получаем

$$\frac{d\chi}{d\tau} = \frac{d-1}{d}\frac{S_d D_0}{(2\pi)^d}\frac{\lambda_0^2}{\nu^2\kappa_c^\varepsilon}\frac{\nu}{\chi+\nu}\left(1 + 2\delta_{ml}\frac{W^2B^2\kappa_c^2}{d-1}\left\{(1+\alpha_0^2)\left[\frac{d+1}{d+2}\delta_{rh}\delta_{pt} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{1}{d+2}(\delta_{rp}\delta_{ht} + \delta_{rt}\delta_{hp})\right] - (1-\alpha_0^2)\left[\frac{d+1}{d+2}\delta_{ph}\delta_{rt} - \frac{1}{d+2}(\delta_{pr}\delta_{ht} + \delta_{pt}\delta_{hr})\right]\right\}\right). \qquad (9)$$

В правой части этого уравнения вязкость и коэффициент диффузии записаны без нулевого индекса, так как на каждом шаге итерационного исключения быстрых мод ренормализуются те значения вязкости и коэффициента диффузии, которые были получены на предыдущем шаге. Вводя турбулентное число Шмидта, преобразуем (9) с учетом соотношения для вязкости [8]

$$\frac{d\mathrm{Sc}_t^{-1}}{d\tau} = \frac{1}{\widetilde{\nu}}\frac{d\widetilde{\nu}}{d\tau}\left[\frac{d-1}{d}\widetilde{A}_d^{-1}\frac{1}{1+\mathrm{Sc}_t^{-1}}\left(1 + \frac{F}{\widetilde{\nu}^{6/\varepsilon}}\right) - \mathrm{Sc}_t^{-1}\right], \qquad (10)$$

где

$$\widetilde{\nu} = \frac{\nu}{\nu_0}, \qquad A_d = \widetilde{A}_d\frac{S_d}{(2\pi)^d}, \qquad \widetilde{A}_d = \frac{d-1}{2(d+2)}, \qquad \mathrm{Sc}_t = \frac{\nu}{\chi},$$

$$F = 2\delta_{ml}\frac{W^2B^2}{d-1}\left(\frac{3A_dD_0}{\varepsilon\nu_0^3}\right)^{2/\varepsilon}\left\{(1+\alpha_0^2)\left[\frac{d+1}{d+2}\delta_{rh}\delta_{pt} - \frac{1}{d+2}(\delta_{rp}\delta_{ht} + \delta_{rt}\delta_{hp})\right] - \right. \qquad (11)$$

$$\left. - (1-\alpha_0^2)\left[\frac{d+1}{d+2}\delta_{ph}\delta_{rt} - \frac{1}{d+2}(\delta_{pr}\delta_{ht} + \delta_{pt}\delta_{hr})\right]\right\}.$$

Решив уравнение (10), получим зависимость для турбулентного числа Шмидта от турбулентной вязкости. Эта зависимость будет замыкать уравнения диффузии (1), которое после ренормализации имеет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\chi_0 + \frac{\nu}{\mathrm{Sc}_t}\right)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]n + \frac{\partial}{\partial x_m}[n(u_m + Ws_m)] = 0. \qquad (12)$$

В общем виде уравнение (10) не допускает точного решения. Рассмотрим приближенные способы анализа этого уравнения. В частном случае ориентации координатной системы, которая справедлива для уравнений (5), соотношение (11) приобретает конкретную форму

$$F = 8\frac{W^2B^2}{d+2}\left(\frac{3A_dD_0}{\varepsilon\nu_0^3}\right)^{2/\varepsilon}\alpha_0^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что непосредственно само движение микроорганизмов, обладающих сферической симметрий, дает малый вклад в формирование турбулентных процессов массопереноса.

В случае, когда второе слагаемое в круглых скобках (10) гораздо меньше единицы, уравнение (10) допускает точное решение [8]

$$\left|\frac{\mathrm{Sc}_{t0}^{-1} - \beta}{\mathrm{Sc}^{-1} - \beta}\right|^{\frac{\beta+1}{\beta+\gamma}}\left|\frac{\mathrm{Sc}_{t0}^{-1} + \gamma}{\mathrm{Sc}^{-1} + \gamma}\right|^{\frac{\gamma-1}{\beta+\gamma}} = \widetilde{\nu}^{-1}, \qquad (13)$$

где

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 4\frac{d-1}{d}\widetilde{A}_d^{-1}} - 1\right), \qquad \gamma = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 4\frac{d-1}{d}\widetilde{A}_d^{-1}} + 1\right),$$

Sc — молекулярное (неренормализованное) число Шмидта. Индекс 0 в турбулентном числе Шмидта означает, что это число является решением в начальном приближении уравнения (10). В области высоких чисел Рейнольдса, т. е. при полностью развитой турбулентности, когда $\nu_0/\nu \to 0$, из (13) находим для трехмерного течения $\mathrm{Sc}_{t0} = \beta^{-1} = 1/1{,}3929 = 0{,}7179$.

Используя Sc_{t0}, получим приближенное решение (10). Для этого перепишем его, включив в правую часть вместо Sc_t начальное приближение Sc_{t0}:

$$d\mathrm{Sc}_t^{-1} = d\mathrm{Sc}_{t0}^{-1} + \frac{d(\widetilde{\nu}\mathrm{Sc}_{t0}^{-1})}{\widetilde{\nu}}\frac{F}{\widetilde{\nu}^{6/\varepsilon}}.$$

Интегрирование по частям второго слагаемого дает

$$\mathrm{Sc}_t^{-1} = \mathrm{Sc}_{t0}^{-1} + F\left[\frac{\mathrm{Sc}_{t0}^{-1}}{\widetilde{\nu}^{6/\varepsilon}} + \left(\frac{6}{\varepsilon} + 1\right)\int\limits_1^{\widetilde{\nu}} \frac{\mathrm{Sc}_{t0}^{-1}}{\widetilde{\nu}^{6/\varepsilon+1}} d\widetilde{\nu}\right] + C.$$

Константу интегрирования C находим из условия $\mathrm{Sc}_t = \mathrm{Sc}_{t0} = \mathrm{Sc}$ при $\widetilde{\nu} = 1$. Получаем

$$\mathrm{Sc}_t^{-1} = \mathrm{Sc}_{t0}^{-1} + F\left[\frac{\mathrm{Sc}_{t0}^{-1} - \mathrm{Sc}^{-1}}{\widetilde{\nu}^{6/\varepsilon}} + \left(\frac{6}{\varepsilon} + 1\right)\int\limits_1^{\widetilde{\nu}} \frac{\mathrm{Sc}_{t0}^{-1}}{\widetilde{\nu}^{6/\varepsilon+1}} d\widetilde{\nu}\right]. \tag{14}$$

В случае, когда $\mathrm{Sc}_{t0} = \mathrm{const}$, имеем

$$\mathrm{Sc}_t^{-1} = \mathrm{Sc}_{t0}^{-1} + F\frac{\varepsilon}{6}\left(\mathrm{Sc}^{-1} - \frac{\mathrm{Sc}_{t0}^{-1}}{\widetilde{\nu}^{6/\varepsilon}}\right). \tag{15}$$

В другом предельном случае, когда $F/\widetilde{\nu}^{6/\varepsilon} \gg 1$, справедливо следующее выражение:

$$\mathrm{Sc}_t^{-1} = \sqrt{2\frac{d-1}{d}\widetilde{A}_d^{-1}\frac{F\varepsilon}{6}\left(1 - \frac{1}{\widetilde{\nu}^{6/\varepsilon}}\right) + (1 + \mathrm{Sc}^{-1})^2} - 1. \tag{16}$$

Таким образом, получено ренормализованное уравнение массопереноса при турбулентной биоконвекции (12). Это уравнение замыкается соотношением для турбулентного числа Шмидта. Непосредственно само турбулентное число Шмидта рассчитывается либо по формулам (14) или (15) при условии $F/\widetilde{\nu}^{6/\varepsilon} \ll 1$, либо по (16) при $F/\widetilde{\nu}^{6/\varepsilon} \gg 1$. В общем случае расчет турбулентной биоконвекции требует дополнительного интегрирования уравнения (10).

Исследование выполнено при финансовой поддержке NATO Collaborative Linkage Grant (CBP. NUKR. CLG981714).

1. *Долінський А. А.* Принцип дискретно-імпульсного вводу енергії та його використання в технологічних процесах // Вісн. АН УРСР. – 1984. – № 1. – С. 39–46.

2. *Bees M. A., Hill N. A.* Wavelengths of bioconvection patterns // J. of Exp. Biology. – 1997. – **200**. – P. 1515–1526.
3. *Kessler J. O., Burnett G. D., Remick K. E.* Mutual dynamics of swimming microorganisms and their fluid habitat // Nonlinear Science at the Dawn of the 21^{st} Century, P. L. Christiansen, M. P. Sorensen, and A. C. Scott (Eds.). – New York: Springer, 2000. – P. 409–426.
4. *Kessler J. O.* Path and pattern – the mutual dynamics of swimming cells and their environment // Comments Theor. Biol. – 1989. – **1**. – P. 85–108.
5. *Liu J.-K., Deng G.-H., Yuan Z.-T. et al.* Turbulence under the microscope // J. of Biolog. Phys. – 2000. – **26**. – P. 77–83.
6. *Harashima A., Watanabe M., Fujishiro I.* Evolution of bioconvection patterns in a culture of motile flagellates // Phys. Fluids. – 1988. – **31**. – P. 764–755.
7. *Csahok Z., Czirok A.* Hydrodynamics of bacterial motion // Physica A. – 1997. – **243**. – P. 304–318.
8. *Yakhot V., Smith L. M.* The renormalization group, the ε-expansion and derivation of turbulence models // J. Sci. Comput. – 1992. – **7**. – P. 35–52.
9. *Pedley T. J., Hill N. A., Kessler J. O.* The growth of bioconvection patterns in a uniform suspension of gyrotactic micro-organizms // J. Fluid Mech. – 1988. – **195**. – P. 223–237.
10. *McComb W. D.* The physics of fluid turbulence. – Oxford: Clarendon Press, 1990. – 572 p.
11. *Forster D., Nelson D. R., Stephen M. J.* Large-distance and longtime properties of a randomly stirred fluid // Phys. Rev. A. – 1977. – **16**, No 2. – P. 732–749.

Институт технической теплофизики
НАН Украины, Киев
Университет штата Северной Каролины, США

Поступило в редакцию 02.07.2007