УДК 518.5+531.2

П. С. Малачівський

Чебишовське наближення сумою многочлена й експоненти з інтерполюванням у крайніх точках

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Я. Й. Бураком)

We consider properties of the Chebyshev (uniform, minimax) approximation of a function by the sum of a polynomial and an exponential with the least absolute error and with interpolation at the end points of the interval. The sufficient conditions of such an approximation for a function $f(x)$ are established, and an algorithm for the construction of such an approximation is proposed.

Чебишовське наближення сумою многочлена й експоненти

$$E_n(a;x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + Ae^{px}, \qquad A \neq 0, \qquad p \neq 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

з інтерполюванням використовується для опису різних фізичних процесів [1, 2] і наближення деяких спеціальних функцій [3]. Розроблені також і технічні пристрої, які реалізують обчислення значення суми многочлена й експоненти [4]. Чебишовське наближення функції виразом (1) для $n = 0$ з точним відтворенням її значення у заданій точці застосовується, зокрема, для опису залежності оптичної щільності відбитку від товщини нанесеного шару фарби [5]. Наближення функцій з точним відтворенням її значення в крайніх точках відрізка використовується для побудови неперервних сплайн-наближень [6].

Вивченню властивостей чебишовського наближення нелінійними виразами з інтерполюванням присвячено роботи [4, 5, 7, 8]. Зокрема, в [4, 5, 7] встановлено достатні умови існування рівномірного наближення виразом (1) з інтерполюванням у крайній лівій точці для $n = 0$ і $n = 1$, а також запропоновано алгоритми для визначення його параметрів. Дослідження чебишовського наближення виразом (1) з інтерполюванням ускладнюється тим, що цей вираз не задовольняє умову Хаара [2], тому виникає питання існування такого наближення для функції $f(x)$ і його єдиності.

Дана робота присвячена виявленню умов існування для функції $f(x)$ чебишовського наближення сумою многочлена й експоненти (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ й інтерполюванням у крайніх точках відрізка, а також розробленню алгоритму для визначення його параметрів.

Розглянемо неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$ ($f(x) \in C[\alpha, \beta]$), які справджують нерівності

$$W^{(n)} > 0, \qquad W^{(n)} \neq W_0^{(n)}, \tag{2}$$

де

$$W^{(n)} = \frac{D_{n+1}(f; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(f; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}, \tag{3}$$

$$W_0^{(n)} = \frac{D_{n+1}(s_{n+1}; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(s_{n+1}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}, \tag{4}$$

$$s_k(x) = x^k,$$

$$D_k(U; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+k+1}) = \frac{D_{k-1}(U; z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots, z_{i+k+1})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots, z_{i+k+1})} -$$

$$- \frac{D_{k-1}(U; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+k})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+k})}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n+1, \tag{5}$$

$$D_1(U; z_i, z_{i+2}) = U(z_{i+2}) - U(z_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n+2, \tag{6}$$

а z_i ($i = \overline{1, n+4}$) — довільні, впорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ ($j = \overline{1, n+3}$) числа з відрізка $[\alpha, \beta]$.

Достатню умову існування для функції $f(x)$ чебишовського наближення сумою многочлена й експоненти (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ й інтерполюванням у крайніх точках відрізка сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. *Достатньою умовою існування рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом* (1) *з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і точним відтворенням значення функції у крайніх точках відрізка α та β (або тільки в одній із них) є справдження нерівностей* (2)*, в яких у випадку інтерполювання у точці α — $z_1 = \alpha$*

$$D_1(U; z_1, z_3) = U(z_3) + U(z_2) - 2U(z_1), \tag{7}$$

а в разі інтерполювання в точці β — $z_{n+4} = \beta$

$$D_1(U; z_{n+2}, z_{n+4}) = 2U(z_{n+4}) - U(z_{n+2}) - U(z_{n+3}). \tag{8}$$

Доведення цієї теореми грунтується на застосуванні характеристичної теореми існування й єдиності найкращого чебишовського наближення нелінійними виразами з інтерполюванням у зовнішніх точках [2] із використанням властивостей комбінації приростів неперервних і диференційовних функцій, що сформульовані в теоремі 2.

Теорема 2. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$ і має обмежену похідну на (α, β), то на інтервалі (α, β) знайдуться такі точки ξ і ζ ($\xi, \zeta \in (\alpha, \beta)$), для яких справджуються рівності*

$$\frac{f(\beta) + f(\gamma) - 2f(\alpha)}{\beta + \gamma - 2\alpha} = f'(\xi); \tag{9}$$

$$\frac{2f(\beta) - f(\gamma) - f(\alpha)}{2\beta - \gamma - \alpha} = f'(\zeta), \tag{10}$$

де $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

Розглянемо умови (2). Неважко пересвідчитись (шляхом підстановки), що для полінома $(n+1)$-го степеня величина $W^{(n)}$ (3) набуває значення $W_0^{(n)}$ (4). Значить, нерівність $W^{(n)} \neq W_0^{(n)}$ умови (2) справджується, зокрема, для функцій $f(x)$, відмінних від полінома $(n+1)$-го степеня. Перша нерівність умови (2) виконується для функцій $f(x)$, n-на похідна яких строго монотонна на відрізку $[\alpha, \beta]$. Тому достатню умову існування рівномірного наближення виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і інтерполюванням у крайніх точках відрізка задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ ($f(x) \in C^n[\alpha, \beta]$), відмінні від полінома $(n+1)$-го степеня, n-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha, \beta]$.

Умови (2) не є необхідними для існування рівномірного наближення виразом (1) для функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням у крайніх точках. Їх виконання необхідне лише в точках чебишовського альтернансу. В разі використання алгоритму Ремеза [1] для знаходження параметрів рівномірної апроксимації виразом (1) виконання умов (2) необхідне в усіх точках проміжних наближень до точок альтернансу.

Відповідно до теореми 1, чебишовське наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й експоненти (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ й інтерполюванням в обох крайніх точках відрізка α і β має $(n+2)$-ті точки альтернансу, а в разі інтерполювання лише в одній із крайніх точок — $(n+3)$-ті точки альтернансу. Нехай z_i ($i = \overline{2, n+2}$) — точки альтернансу у випадку наближення з інтерполюванням в обох крайніх точках відрізка, z_i ($i = \overline{2, n+4}$) — точки альтернансу в разі наближення з інтерполюванням лише в точці α, а z_i ($i = \overline{1, n+3}$) — у точці β.

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми і точки альтернансу відомі, то параметри a_i ($i = \overline{0, n}$) і A чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ й інтерполюванням у крайніх точках відрізка визначаються за формулами

$$A = \frac{D_{n+1}(f; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}; \tag{11}$$

$$\begin{aligned} a_k = {} & \frac{D_k(f; z_1, z_2, \ldots, z_{k+2}) - \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i D_k(s_i; z_1, z_2, \ldots, z_{k+2})}{D_k(s_k; z_1, z_2, \ldots, z_{k+2})} - \\ & - A\frac{D_k(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{k+2})}{D_k(s_k; z_1, z_2, \ldots, z_{k+2})}, \qquad k = \overline{1, n}; \end{aligned} \tag{12}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(f(z_2) + f(z_3) - \sum_{i=1}^{n} a_i(z_2^i + z_3^i) - A(e^{pz_2} + e^{pz_3})\right), \tag{13}$$

де $\varphi(p, x) = e^{px}$, вирази $D_k(U; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+k+1})$ визначаються залежно від точок інтерполювання за відповідними формулами (5)–(8). Значення параметра p є розв'язком рівняння

$$\omega_n(p) = W^{(n)}, \tag{14}$$

де

$$\omega_n(p) = \frac{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})},$$

а значення виразів $W^{(n)}$ і $D_{n+1}(\varphi; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+n+2})$, $i = 1, 2$, визначаються залежно від точок інтерполювання за відповідними формулами (3)–(8).

Під час дослідження виявлено, що ліва частина рівняння (14) є експоненційною функцією щодо p, тому його розв'язок доцільно шукати як корінь прологарифмованого рівняння

$$g_n(p) = V^{(n)}, \tag{15}$$

де $g_n(p) = \ln(\omega_n(p))$, $V^{(n)} = \ln(W^{(n)})$.

Розв'язок рівняння (15) можна обчислити за ітераційним методом Ньютона

$$p_{i+1} = p_i - \frac{g_n(p_i) - V^{(n)}}{g'_n(p_i)}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

де

$$g'_n(p) = \frac{D_{n+1}(\overline{\varphi}; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})} - \frac{D_{n+1}(\overline{\varphi}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}; \tag{17}$$

$$\overline{\varphi}(p; z) = ze^{pz}; \qquad \varphi(p, z) = e^{pz};$$

$$p_0 = \operatorname{sign}(W^{(n)} - W_0^{(n)}) \frac{2|V^{(n)}|}{z_{n+4} - z_{n+2} + z_3 - z_1}, \tag{18}$$

а значення виразів $W^{(n)}$, $W_0^{(n)}$ і $D_{n+1}(U; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+n+2})$, $i = 1, 2$, визначаються залежно від точок інтерполювання за відповідними формулами (3)–(8).

Початкове значення наближення p_0 до кореня рівняння (14) визначено з умови збігу його знаку зі знаком шуканого розв'язку. Збіг знаків необхідний для забезпечення стійкості ітераційного методу (16), оскільки функція $g_n(p)$ має розрив у точці $p = 0$. При такому виборі початкового значення p_0 проміжні значення p_i $(i = 1, 2, \ldots)$ завжди будуть однакового знаку з шуканим розв'язком і, зрозуміло, не переходитимуть через нуль.

Під час розв'язування тестових задач ітераційний процес (16) збігався за 3–4 ітерації.

Отже, можна зробити такі висновки. Достатньою умовою існування рівномірного наближення сумою полінома й експоненти (1) для функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і інтерполюванням у крайніх точках відрізка є виконання нерівностей (2). Ці умови задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ $(f(x) \in C^n[\alpha, \beta])$, відмінні від полінома $(n + 1)$-го степеня, n-та похідна яких строго монотонна на $[\alpha, \beta]$.

Параметри a_i $(i = \overline{0, n})$ і A такого наближення визначаються за формулами (11)–(13). Значення параметра p є коренем трансцендентного рівняння (14). Для знаходження розв'язку цього рівняння запропоновано ітераційну схему (16), яка під час розв'язування практичних прикладів збігалася за 3–4 ітерації.

Найкраще рівномірне наближення виразом (1) з точним відтворенням значення функції у крайніх точках відрізка використовується для побудови неперервних мінімаксних сплайн-наближень.

1. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 352 с.
2. *Попов Б. А., Малачивский П. С.* Наилучшие чебышевские приближения суммой многочлена и нелинейных функций. – Львов, 1984. – 70 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-мех. ин-т им. Г. В. Карпенко; № 85).
3. *Kobayashi Y., Ohkita M., Inoue M.* On the use of exponential functions in approximation of elliptic integrals // Math. Comput. Simulation. – 1979. – **21**, № 2. – P. 226–230.
4. *Воробель Р. А., Попов Б. А.* Равномерное приближение экспоненциальными и степенными выражениями с условием // Алгоритмы и програмы для вычисления функций на ЭЦВМ. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1981. – Вып. 5. Ч. 1. – С. 158–70.
5. *Луцків М. М., Малачівський П. С.* Апроксимація залежності оптичної щільності від товщини шару фарби на відбитку // Кваліологія книги. № 5. – Львів, 2004. – С. 95–102.
6. *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с.
7. *Воробель Р. А., Попов Б. А.* Равномерное приближение линейно-экспоненциальными и линейно-степенными выражениями с условием // Алгоритмы и програмы для вычисления функций на ЭЦВМ. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1981. – Вып. 5. Ч. 1. – С. 171–180.

8. *Dunham C., Zhu C.* Strong uniqueness of nonlinear Chebyshev approximation (with interpolation) // Numerical Mathematics and Computing, Proc. 20th Manitoba Conf., Winnipeg/Can. 1990. – Congr. Numerantium 80. – P. 161–169 (1991).

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 30.07.2007