ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

Г. П. Даців, Р. С. Хапко

Застосування перетворення Келі і методу інтегральних рівнянь для чисельного розв'язування лінійної осесиметричної задачі слошингу

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. Л. Макаровим)

We consider an evolution problem on free boundary arising in the linear sloshing. A numerical solution is realized through the Cayley transformation with respect to time and the integral equation method with respect to spatial variables. Taking into account the axial symmetry, the sequence of one-dimensional integral equations of the second kind is obtained. The full discretization is performed by the Nyström method with non-linear mesh grading transformation.

Задачі слошингу є актуальними для різних прикладних застосувань. Одна з математичних моделей, що характерна для лінійного слошингу в контейнері, формулюється як еволюційна задача на вільній поверхні з операторним коефіцієнтом [1, 2]. У роботах [1, 3] для часткової дискретизації еволюційних задач за часовою змінною запропоновано ефективний спосіб, що грунтується на використанні перетворення Келі і поліномах Лагерра. Важливою перевагою цього методу є його належність до класу алгоритмів без насичення точності. Для подання оператора у вихідному рівнянні зручно скористатися теорією потенціалів, що дає можливість редукувати операторні рівняння до послідовності інтегральних. У даній роботі цей підхід розроблено для лінійної осесиметричної задачі.

1. Постановка задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — обмежена область, заповнена рідиною, з границею $\partial\Omega = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, де Γ_1 — вільна границя області, Γ_2 — непроникна частина границі області.

Нехай необхідно знайти обмежену функцію $u\colon \Gamma_1 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, яка є розв'язком такої еволюційної задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma_1 \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \omega_0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma_1. \tag{2}$$

Тут ω_0 — задана функція і оператор A визначається як

$$Au = \frac{\partial v}{\partial \nu} \qquad \text{на} \qquad \Gamma_1, \tag{3}$$

де ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$ і v є гармонійною в Ω функцією з граничними умовами

$$v = u \qquad \text{на} \qquad \Gamma_1, \qquad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma_2. \tag{4}$$

2. Часткова дискретизація за часом і зведення до інтегральних рівнянь. Виходячи з результатів, наведених у [1, 3], подамо розв'язок нестаціонарної задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(x,t) = e^{-\delta t} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)[u_n(x) - u_{n+1}(x)]. \tag{5}$$

Тут $\delta < 1/2$ — фіксована константа, L_n — поліноми Лагерра, а коефіцієнти u_n визначаються з рекурентної послідовності операторних рівнянь

$$(A + \alpha_0 I)u_{n+1} = 2(A + \alpha_1 I)u_n - (A + \alpha_2 I)u_{n-1}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

де $\alpha_0 = (\delta - 1)^2$, $\alpha_1 = \delta(\delta - 1)$ для $n \geqslant 0$, $\alpha_2 = \delta^2$ для $n > 0$ і $\alpha_2 = \alpha_1$ для $n = 0$. Тут і далі $u_{-1} = u_0$, а всі функції з індексами, меншими від -1, вважаються рівними нулю.

Для зведення операторних рівнянь (6) до інтегральних скористаємося теорією потенціалу [4]. Подамо коефіцієнти u_n і, відповідно, Au_n через потенціали простого шару з густинами μ_n і фундаментальним розв'язком $\Phi(x,y) = (1/4\pi)|x - y|^{-1}$

$$u_n(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \mu_n(y)\Phi(x,y)\, ds(y), \qquad x \in \Gamma_1 \tag{7}$$

і

$$(Au_n)(x) = \frac{1}{2}\mu_n(x) + \int\limits_{\partial\Omega} \mu_n(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} ds(y), \qquad x \in \Gamma_1. \tag{8}$$

У результаті для (6) з врахуванням означення оператора A (3) отримуємо послідовність систем інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\mu_{n+1}(x) + \displaystyle\int\limits_{\partial\Omega} \mu_{n+1}(y)\Psi(\alpha_0, 1; x, y)\, ds(y) = \mu_n(x) - \dfrac{1}{2}\mu_{n-1}(x) + \\ \qquad + 2\displaystyle\int\limits_{\partial\Omega} \mu_n(y)\Psi(\alpha_1, 1; x, y)\, ds(y) - \displaystyle\int\limits_{\partial\Omega} \mu_{n-1}(y)\Psi(\alpha_2, 1; x, y)\, ds(y), \qquad x \in \Gamma_1, \\ \dfrac{1}{2}\mu_{n+1}(x) + \displaystyle\int\limits_{\partial\Omega} \mu_{n+1}(y)\Psi(0, 1; x, y) ds(y) = 0, \qquad x \in \Gamma_2, \qquad n = 0, 1, \ldots, \end{cases} \tag{9}$$

де $\Psi(\alpha, \beta; x, y) = \alpha\Phi(x,y) + \beta\partial\Phi(x,y)/\partial\nu(x)$.

Густина μ_0 визначається із системи інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \int\limits_{\partial\Omega} \mu_0(y)\Psi(1,0;x,y)\,ds(y) = \omega_0(x), \qquad x \in \Gamma_1, \\ \dfrac{1}{2}\mu_0(x) + \int\limits_{\partial\Omega} \mu_0(y)\Psi(0,1;x,y)\,ds(y) = 0, \qquad x \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{10}$$

3. Параметризація інтегральних рівнянь. Нехай границя $\partial\Omega$ утворена обертанням кривої $L = L_1 \bigcup L_2$ навколо осі Ox_3 і L_i задані параметрично $L_i = \{x_i(\xi) = (r_i(\xi),\ z_i(\xi)),\ (i-1)\pi \leqslant \xi \leqslant i\pi\}$ із $r_i \geqslant 0$ і $|x_i'(\xi)| > 0$ для всіх $\xi \in [(i-1)\pi, i\pi]$, $i = 1, 2$. Тоді в циліндричній системі координат (r, z, φ) границя $\partial\Omega$ має вигляд

$$\partial\Omega = \{x(\xi,\varphi) = (r(\xi)\cos(\varphi), r(\xi)\sin(\varphi), z(\xi)),\ 0 \leqslant \xi,\ \varphi \leqslant 2\pi\}, \tag{11}$$

де $r(\xi) = r_i(\xi)$, $z(\xi) = z_i(\xi)$ для $\xi \in [(i-1)\pi, i\pi]$, $i = 1, 2$, відстань між точками $x(\xi, 0)$ і $y(\tau, \varphi)$ задається як $R(\xi,\tau,\varphi) = ([r(\xi)]^2 + [r(\tau)]^2 - 2r(\xi)r(\tau)\cos(\varphi) + [z(\xi) - z(\tau)]^2)^{1/2}$. Будемо також вважати, що функція w_0 не залежить від φ. Після параметризації в (9) отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\mu_{1,n+1}(\xi) + \dfrac{1}{4\pi}\sum\limits_{\ell=1}^{2}\int\limits_{(\ell-1)\pi}^{\ell\pi} \mu_{\ell,n+1}(\tau)\widehat{\Psi}_{1,\ell}(\alpha_0, 1; \xi, \tau)\,d\tau = \\ \qquad = \mu_{1,n}(\xi) - \dfrac{1}{2}\mu_{1,n-1}(\xi) + \dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{\ell=1}^{2}\int\limits_{(\ell-1)\pi}^{\ell\pi} \mu_{\ell,n}(\tau)\widehat{\Psi}_{1,\ell}(\alpha_1, 1; \xi, \tau)\,d\tau - \\ \qquad\quad - \dfrac{1}{4\pi}\sum\limits_{\ell=1}^{2}\int\limits_{(\ell-1)\pi}^{\ell\pi} \mu_{\ell,n-1}(\tau)\widehat{\Psi}_{1,\ell}(\alpha_2, 1; \xi, \tau)\,d\tau, \qquad \xi \in [0, \pi), \\ \dfrac{1}{2}\mu_{2,n+1}(\xi) + \dfrac{1}{4\pi}\sum\limits_{\ell=1}^{2}\int\limits_{(\ell-1)\pi}^{\ell\pi} \mu_{\ell,n+1}(\tau)\widehat{\Psi}_{2,\ell}(0, 1; \xi, \tau)\,d\tau = 0,\ \xi \in (\pi, 2\pi],\ n = 0, 1, \ldots, \end{cases} \tag{12}$$

де $\mu_{\ell,n}(\xi) = \mu_n(x_\ell(\xi))$, $\ell = 1, 2$ і

$$\hat{\Psi}_{i,\ell}(\alpha,\beta;\xi,\tau) = r_\ell(\tau)[r_\ell'(\tau)^2 + z_\ell'(\tau)^2]^{1/2}\left[\alpha\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{R(\xi,\tau,\varphi)} + \beta\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\nu(x_i(\xi))}\frac{d\varphi}{R(\xi,\tau,\varphi)}\right]. \tag{13}$$

Нескладні перетворення в (13) приводять до такого подання:

$$\widehat{\Psi}_{i,\ell}(\alpha,\beta;\xi,\tau) = \Psi_{i,\ell}^{(1)}(\alpha,\beta;\xi,\tau)K(k_{i,\ell}^2(\xi,\tau)) + \Psi_{i,\ell}^{(2)}(\alpha,\beta;\xi,\tau)E(k_{i,\ell}^2(\xi,\tau)),$$

де $\Psi_{i,\ell}^{(1)}$ і $\Psi_{i,\ell}^{(2)}$ — неперервні функції, гладкість яких залежить від гладкості кривих L_1 і L_2, K і E — повні еліптичні інтеграли першого і другого роду відповідно, $k_{i,\ell}^2(\xi,\tau) = 2r_i(\xi)r_\ell(\tau)/(r_i(\xi) + r_\ell(\tau))^2 + (z_i(\xi) - z_\ell(\tau))^2$. Відомо [5], що густини $\mu_{\ell,n}$ мають при підході до кутової точки $\tau = \pi$ особливість виду

$$\mu_{\ell,n}(\tau) = O(|\tau - \pi|^\lambda), \qquad \lambda = \min\left\{\frac{\pi}{2\theta}, \frac{\pi}{2(2\pi - \theta)}\right\} - 1.$$

Тут θ — внутрішній кут між кривими L_1 і L_2 у точці їх перетину. З метою послаблення цієї особливості, аналогічно до [2], для $\xi,\ \tau \in [(i-1)\pi, i\pi]$, $i = 1, 2$, здійснюється спеціальна заміна змінних $\tau = w_i(\sigma)$, $\xi = w_i(s)$, де функції w_i мають такі властивості гладкості:

$$w_i \in C^{q-1}[0, 2\pi], \quad w_i^{(\ell)}(j\pi) = 0, \quad w_i(s + 2\pi) = w_i(s), \quad \ell = \overline{1, q-1}, \quad j = 0, 1, 2;$$
$$q \in \mathbb{N}, \qquad q \geqslant 2.$$

Після здійснення заміни і нескладних перетворень з послідовності систем (12) отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\varphi_{1,n+1}(s) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{2}\int_0^{2\pi}\varphi_{\ell,n+1}(\sigma)\tilde{\Psi}_{1,\ell}(\alpha_0, 1; s, \sigma)\,d\sigma = \\ \qquad = \varphi_{1,n}(s) - \dfrac{1}{2}\varphi_{1,n-1}(s) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{2}\int_0^{2\pi}\varphi_{\ell,n}(\sigma)\tilde{\Psi}_{1,\ell}(\alpha_1, 1; s, \sigma)\,d\sigma - \\ \qquad\quad - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{2}\int_0^{2\pi}\varphi_{\ell,n-1}(\sigma)\tilde{\Psi}_{1,\ell}(\alpha_2, 1; s, \sigma)\,d\sigma, \qquad s \in [0, 2\pi], \\ \dfrac{1}{2}\varphi_{2,n+1}(s) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{2}\int_0^{2\pi}\varphi_{\ell,n+1}(\sigma)\tilde{\Psi}_{2,\ell}(0, 1; s, \sigma)\,d\sigma = 0, \quad s \in [0, 2\pi], \ n = 0, 1, \ldots, \end{cases} \tag{14}$$

де $\varphi_{\ell,n}(s) = \mu_{\ell,n}(w_\ell(s))w_\ell'(s)$, $\widetilde{\Psi}_{i,\ell}(\alpha, \beta; s, \sigma) = \widehat{\Psi}_{i,\ell}(\alpha, \beta; w_i(s), w_\ell(\sigma))w_i'(s)$. Зважаючи на подання (13) і наявність в еліптичних інтегралах логарифмічної особливості [6], ядра $\widetilde{\Psi}_{\ell,\ell}$ можна записати таким чином:

$$\widetilde{\Psi}_{\ell,\ell}(\alpha, \beta; s, \sigma) = \widetilde{\Psi}_{\ell,\ell}^{(1)}(\alpha, \beta; s, \sigma)\ln\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2} + \widetilde{\Psi}_{\ell,\ell}^{(2)}(\alpha, \beta; s, \sigma), \qquad \ell = 1, 2,$$

де $\widetilde{\Psi}_{\ell,\ell}^{(1)}$ мають властивості гладкості, аналогічні до $\widehat{\Psi}_1$, а $\widetilde{\Psi}_{\ell,\ell}^{(2)}$ мають особливості у вершинах і в центрі квадрата $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, що буде враховано при чисельному розв'язуванні. Зауважимо також, що ядра $\widetilde{\Psi}_{i,\ell}$ при $i \neq \ell$ є гладкими.

Аналогічні перетворення, здійснені в (10), приводять до такої параметризованої системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{2}\int_0^{2\pi}\varphi_{\ell,0}(\sigma)\tilde{\Psi}_{1,\ell}(1, 0; s, \sigma)\,d\sigma = g_0(s), \qquad s \in [0, 2\pi], \\ \dfrac{1}{2}\varphi_{2,0}(s) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{2}\int_0^{2\pi}\varphi_{\ell,0}(\sigma)\tilde{\Psi}_{2,\ell}(0, 1; s, \sigma)\,d\sigma = 0, \qquad s \in [0, 2\pi], \end{cases} \tag{15}$$

де $g_0(s) = w_0(w_1(s))w_1'(s)$.

Теорема 1. *Нехай $q \geqslant 3$. Для w_0 з простору Соболева парних 2π-періодичних функцій $H_e^0[0, 2\pi]$ існують єдині розв'язки послідовності систем інтегральних рівнянь* (14), (15) *$\varphi_{1,n}$, $\varphi_{2,n} \in H_e^0[0, 2\pi]$.*

Доведення. Покажемо коректність системи (15). Очевидно, що їй відповідає така мішана внутрішня гранична задача:

$$\Delta U = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad U = w_0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \qquad \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2.$$

На основі формули Гріна [7], справедливої для випадку кусково-гладкої границі $\partial\Omega$, отримуємо єдиність класичного розв'язку цієї задачі. Звідси випливає єдиність розв'язку системи інтегральних рівнянь (15). Перепишемо цю систему в операторному вигляді

$$\begin{pmatrix} S + C_{11} + D_{11} & B_{12} \\ B_{21} & \frac{1}{2}I + C_{22} + D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{1,0} \\ \varphi_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тут

$$(S\varphi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}\right) \varphi(\sigma)\, d\sigma,$$

$$(C_{11}\varphi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\widetilde{\Psi}^{(1)}_{1,1}(1,0;s,\sigma) - 1] \ln\left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}\right) \varphi(\sigma)\, d\sigma,$$

$$(C_{22}\varphi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{\Psi}^{(1)}_{2,2}(0,1;s,\sigma) \ln\left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}\right) \varphi(\sigma)\, d\sigma,$$

$$(D_{\ell\ell}\varphi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{\Psi}^{(2)}_{\ell,\ell}(\alpha_\ell, \beta_\ell; s,\sigma) \varphi(\sigma)\, d\sigma,$$

$$(B_{k\ell}\varphi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{\Psi}_{k,\ell}(\alpha_k, \beta_k; s,\sigma) \varphi(\sigma)\, d\sigma,$$

де $k,\ \ell = 1,2$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$ для $s \in [0, 2\pi]$. У [4] показано, що оператор $S\colon H^0_e[0,2\pi] \to H^1_e[0,2\pi]$ є обмежений і має обмежений обернений. Оператори $B_{k\ell}$ компактні в $H^0_e[0,2\pi]$, оскільки мають неперервні ядра. Аналогічно до [8] на основі техніки перетворення Меліна можна показати, що оператори $C_{\ell\ell} + D_{\ell\ell}$, $\ell = 1,2$ є обмеженими з $H^0_e[0,2\pi]$ у $H^1_e[0,2\pi]$, що дає їх компактність у $H^0_e[0,2\pi]$. У результаті на основі теорії Рісса–Шаудера [4] отримуємо коректність системи (15). Обгрунтування коректності систем (14) здійснюється аналогічно з використанням методу індукції.

4. Повна дискретизація. Чисельне розв'язування інтегральних рівнянь здійснимо методом Ністрьома з використанням тригонометричних квадратурних формул [4, 9]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)\, ds \approx \frac{1}{2M} \sum_{j=0}^{2M-1} f(s_j), \tag{16}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)d\sigma \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_j(s) f(s_j), \tag{17}$$

де $s_k = k\pi/M$, $k = 0,\ldots,2M-1$, $M \in \mathbb{N}$, R_j — відомі вагові функції. У результаті до розв'язування отримуємо рекурентну послідовність систем лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + A_{11}(\alpha_0,1) & B_{12}(\alpha_0,1) \\ B_{21}(0,1) & \frac{1}{2}I + A_{22}(0,1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{1,n+1} \\ \widetilde{\varphi}_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + 2A_{11}(\alpha_1,1) & 2B_{12}(\alpha_1,1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{1,n} \\ \widetilde{\varphi}_{2,n} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + A_{11}(\alpha_2,1) & B_{12}(\alpha_2,1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{1,n-1} \\ \widetilde{\varphi}_{2,n-1} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Тут нами введено такі матриці:

$$A_{\ell\ell}(\alpha,\beta) = \left[\widetilde{\Psi}^{(1)}_{\ell,\ell}(\alpha,\beta;s_k,s_i)(R_i(s_k) + R_{2M-i}(s_k)) + \frac{1}{M}\widetilde{\Psi}^{(2)}_{\ell,\ell}(\alpha,\beta;s_k,s_i)\right]_{k,i=1}^{M-1},$$

$$B_{\ell j}(\alpha,\beta) = \frac{1}{M}[\widetilde{\Psi}_{\ell,j}(\alpha,\beta;s_k,s_i)]_{k,i=1}^{M-1}, \qquad \ell, j = 1,2,$$

і вектори $\widetilde{\varphi}_{\ell,n} = [\widetilde{\varphi}_{\ell,n}(s_i)]_{i=1}^{M-1}$, де $\widetilde{\varphi}_{\ell,n}(s_i) \approx \varphi_{\ell,n}(s_i)$, $\ell = 1,2$, $n = 0,\ldots$. Зауважимо, що при отриманні виписаної послідовності систем враховано парність і симетричність підінтегральних функцій і апріорну інформацію про рівність нулю шуканих густин у точках 0 і π. Остання властивість дає можливість уникнути обчислення значень ядер $\widetilde{\Psi}^{(2)}_{\ell,\ell}$ у точках їх невизначеності, зазначених вище. Аналіз збіжності та оцінка похибки методу Ністрьома здійснюється аналогічно до схеми, запропонованої в [9]. Має місце твердження.

Теорема 2. *Нехай крива обертання L має кут $(1-\rho)\pi$ з $0 < |\rho| < 1$ і нехай $\omega_0 \in \in H^{p+5/2}(L_1)$ для $p \in \mathbb{N}$ і $q \geqslant 3$. Тоді для $q > (p+1/2)(1+|\rho|)$ і кожного $n = 0,\ldots$ система лінійних рівнянь* (18) *має єдиний розв'язок і справедлива оцінка похибки*

$$\|\varphi_{\ell,n} - \widetilde{\varphi}_{\ell,n}\|_{H^0_e[0,2\pi]} \leqslant C_n M^{-p},$$

де $C_n > 0$ і $\ell = 1,2$.

Отже, для функцій u_n, відповідно до (7), маємо таку апроксимацію:

$$\widetilde{u}_n(x_1(s)) = \sum_{i=1}^{M-1}\widetilde{\varphi}_{1,n}(s_i)\left[\widetilde{\Psi}^{(1)}_{1,1}(1,0;s,s_i)\{R_i(s) + R_i(\pi - s)\} + \frac{1}{M}\widetilde{\Psi}^{(2)}_{1,1}(1,0;s,s_i)\right] +$$

$$+ \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M-1}\widetilde{\varphi}_{2,n}(s_i)\widetilde{\Psi}_{1,2}(1,0;s,s_i). \tag{19}$$

У ролі наближеного розв'язку еволюційної задачі беремо часткову суму ряду (5)

$$u_N^M(x_1(s),t) = e^{-\delta t}\sum_{n=0}^{N} L_n(t)[\widetilde{u}_n(x_1(s)) - \widetilde{u}_{n+1}(x_1(s)). \tag{20}$$

Таблиця 1. Чисельні результати

t	$M = N$	$\xi = 1$	$\xi = 2$	$\xi = 3$
0,0	32	0,611847634	−0,410898038	−1,036876256
	64	0,606851013	−0,392930667	−0,999174463
	128	0,606900278	−0,393239220	−0,999956312
	Lag.	0,606900946	−0,393239555	−0,999999918
0,5	32	0,522043109	−0,044705590	−0,395243607
	64	0,521372952	−0,041925900	−0,389586936
	128	0,521369142	−0,041923309	−0,389466566
	Lag.	0,521368896	−0,041923065	−0,389456054
1,0	32	0,917979758	0,704484478	0,334089949
	64	0,915416047	0,703282521	0,334546555
	128	0,915667493	0,703397647	0,334553375
	Lag.	0,915680947	0,703397793	0,334553461

Наведена нижче теорема, яка сформульована і доведена в [3], демонструє оцінку похибки апроксимації за часом.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2 і $w_0 \in D(A^\sigma)$. Тоді для достатньо великого N має місце оцінка похибки*

$$\sup_{t \in (0,T)} \|u(\cdot,t) - u_N(\cdot,t)\|_{L^2(L_1)} \leqslant cN^{-\sigma+(1/4)}\|A^\sigma w_0\|_{L^2(L_1)}, \qquad t > 0.$$

5. Чисельні експерименти. Розглянемо еволюційну задачу (1), (2). Нехай поверхні Γ_1 і Γ_2 утворені обертанням кривих L_1 та L_2, які задані параметрично:

$$L_1 := \left\{x_1(\xi) = \left(\frac{\xi}{\pi}, 0\right),\ 0 \leqslant \xi \leqslant \pi\right\},$$

$$L_2 := \left\{x_2(\xi) = \left(\sin\left(\frac{\xi}{2}\right), 2\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right),\ \pi \leqslant \xi \leqslant 2\pi\right\}.$$

Виберемо $\omega_0(x_1(s)) = \cos(s)$. Табл. 1 містить наближений розв'язок задачі (1), (2) при різних параметрах дискретизації, причому $\delta = 0{,}01$. Ці результати порівнюються з результатами, отриманими при чисельному розв'язуванні цієї ж задачі з використанням перетворення Лагерра для дискретизації за часом [2] (при обчисленні розв'язку взято $\delta = 0$, $M_1 = M_2 = 128$, $N = 30$, $\kappa = 4$).

Отже, чисельні результати підтверджують очікувану збіжність відповідно до теорем 2 і 3. Проведене порівняння з методом розвинення в ряд Лагерра [2] показує, що в найгіршому випадку в результатах збігаються чотири знаки після коми.

1. *Gavrilyuk I., Kulyk A., Makarov V.* Integral equations of the linear sloshing in an infinite chute and their discretization // Comput. Methods Appl. Math. – 2001. – **1**. – P. 39–61.
2. *Даців Г.* Про чисельне розв'язування однієї еволюційної задачі на частині поверхні осесиметричної області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – **13**. – С. 15–29.
3. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Strongly positive operators and numerical algorithms without accuracy saturation. – Kiev: Institute of Math. of NASU, 2005. – 500 c.
4. *Kress R.* Linear Integral Equations. – 2nd ed. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1999. – 365 c.
5. *Costabel M., Stephan E. P.* Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation // Math. Models in Mechanics. – Warsaw: Banach Center Publications, PWN-Polish Scientific Publishers, 1985. – Vol. 15. – P. 175–251.

6. *Cody W. J.* Chebyshev approximation for the complete elliptic integrals K and E // Math. Comput. – 1965. – **19**. – P. 105–112.
7. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. – Москва: Высш. школа, 1977. – 432 с.
8. *Elshner J., Graham I. G.* Quadrature methods for Symm's integral equation on polygons // IMA J. Numer. Anal. – 1997. – **17**. – P. 643–664.
9. *Kress R., Tran T.* Inverse scattering for a locally perturbed half-plane // Inverse Problems. – 2000. – **16**. – P. 1541–1559.

Львівський національний університет ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 17.07.2007

УДК 517.95

І. Я. Кміть

Мішана задача для двовимірної гіперболічної системи першого порядку

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

Using an analog of the classical method of characteristics for one-dimensional hyperbolic systems, we investigate a mixed problem for a two-dimensional semilinear hyperbolic system with non-Lipschitz nonlinearities. We prove that the problem is correctly posed in the classical sense.

При постановці мішаних задач для гіперболічних рівнянь чи систем вибір крайових умов потрібно підпорядковувати таким вимогам. З одного боку, крайові умови повинні визначати вхідні хвилі в розглядувану область, а з іншого — вони не повинні змінювати поведінку вихідних хвиль. У випадку багатьох незалежних змінних ситуація істотно ускладнюється. Це зумовлюється складністю визначення вхідних і вихідних хвиль. Відомо кілька підходів до розв'язання питання про коректну постановку мішаних задач. Зокрема, Friedrichs [1] "енергетичним методом" отримав деякий клас крайових умов, за яких задача є коректно поставленою. Інший клас умов у просторах Соболєва отримали Lax і Phillips [2]. Hersh [3] довів необхідні і достатні умови для коректної постановки мішаних задач у півпросторі з нехарактеристичною межею, але його результати стосуються лише однорідних систем із сталими коефіцієнтами без молодших членів. Метод доведення базується на перетвореннях Лапласа і Фур'є. Інші підходи запропоновано в [4–11]. У даній роботі ми доводимо результат про коректну постановку в класичному сенсі мішаної задачі для двовимірної майже лінійної гіперболічної системи з неліпшіцевими нелінійностями. Ми використовуємо аналог класичного методу характеристик. Як і в одновимірному випадку, наш підхід базується на інтегральному зображені задачі.

Постановка задачі та її інтегральне зображення. В області $\Pi = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ t > 0\}$ розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u_{jt} - \lambda_{i1}(x,t)u_{jx} - \lambda_{i2}(y,t)u_{jy}) = f_i(x,y,t,u), \qquad i \leqslant n, \tag{1}$$