ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2008

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 534.08.

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

Об определении оптимальной фазочастотной характеристики корректирующих звеньев в системе воспроизведения вибраций

The problem of the optimal phase-frequency description of the phase error in a closed automatic system is solved.

В системах воспроизведения вибраций (СВВ) при изменении частоты управляющего сигнала фазочастотная характеристика колебательных систем изменяется от 0 до $-\pi$, что может преобразовывать в замкнутых системах отрицательные обратные связи в положительные. А это значит, что СВВ может переходить в неустойчивый режим работы. В связи с такой ситуацией необходимо определить допустимый сдвиг по фазе выходной величины сигнала СВВ относительно входной (задающего сигнала) при условии, что СВВ будет устойчивой. Примем, что в этом случае определяемый фазовый сдвиг ($\Delta\varphi$) должен соответствовать минимуму некоторого функционала качества, например,

$$I = f(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \omega), \tag{1}$$

где φ — угол между выходным и входным сигналами СВВ; $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ — скорость и ускорение φ соответственно; ω — круговая частота гармонических сигналов в СВВ ($\omega = 2\pi f$, f — частота, Гц). Известно [1, 2], что фазовые искажения в замкнутых автоматических системах приводят к нарушению их устойчивой работы. Как было отмечено, то же самое может быть и в СВВ. Во избежание неустойчивой работы СВВ следует решить задачу нахождения оптимальных фазокорректирующих звеньев. Для минимизации функционала (1) можно воспользоваться методами вариационного исчисления [3, 4], на основании которых находятся экстремали $\varphi(\omega) = F(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \omega)$. Такая экстремаль будет являться зависимостью фазового сдвига φ (фазовой ошибки $\Delta\varphi$), скорости изменения $\Delta\varphi$, ускорения $\Delta\varphi$ от частоты ω, т. е. будет представлять собой фазочастотную характеристику (ФЧХ) фазовой ошибки $\Delta\varphi$. Зная ФЧХ замкнутой СВВ и ФЧХ фазовой ошибки $\Delta\varphi$, можно найти ФЧХ корректирующих звеньев. Если ФЧХ фазовой ошибки получена на основе получения указанной ранее экстремали, то тогда ФЧХ корректирующих звеньев будет оптимальной.

Более конкретно в качестве критерия оптимальности, соответствующего функционалу (1), можно принять минимум интегрального функционала

$$I = \int_0^{\omega} [(\varphi - \varphi_{oc})^2 + \tau_1^2(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{oc})^2 + \tau_2^2(\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_{oc\Sigma})^2]d\omega, \tag{2}$$

где τ_1, τ_2 — весовые коэффициенты; φ, $\varphi_{\text{ос}\Sigma}$ — фазы входного сигнала и сигнала вибростенда (ВС) совместно с обратной связью (ОС). Так как в (2) $\varphi_{\text{ос}}$ со знаком "$-$", то эта ОС является отрицательной (ООС). Согласно вышеописанному объяснению, найдем функцию фазовой ошибки, используя экстремали функционала (2). Для нахождения этих экстремалей применим метод классического вариационного исчисления [3, 4]. Для сокращения записи обозначим $\Theta = \Delta\varphi = \varphi - \varphi_{oc\Sigma}$, $\dot{\Theta} = \Delta\dot{\varphi} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{oc\Sigma}$, $\ddot{\Theta} = \Delta\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_{oc\Sigma}$.

Уравнение Эйлера–Пуассона для функционала (2) запишем в виде

$$\frac{\partial F}{\partial \Theta} - \frac{d}{d\omega}\frac{\partial F}{\partial \dot{\Theta}} + \frac{d^2}{d\omega^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot{\Theta}} = 2\Theta - 2\tau_1^2\ddot{\Theta} + 2\tau_2^2\overset{(\mathrm{IV})}{\Theta} = \Theta - \tau_1^2\ddot{\Theta} + \tau_2^2\overset{(\mathrm{IV})}{\Theta} = 0. \tag{3}$$

Характеристическое уравнение для (3) следующее:

$$\tau_2^2 k^4 - \tau_1^2 k^2 + 1 = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) является биквадратным. Обозначим $z = k^2$. Тогда (4) примет вид $\tau_2^2 z^2 - \tau_1^2 z + 1 = 0$. Приведем решение этого уравнения:

$$z_1 = \frac{\tau_1^2 + \sqrt{\tau_1^4 - 4\tau_2^2}}{2\tau_2^2}, \qquad z_2 = \frac{\tau_1^2 - \sqrt{\tau_1^4 - 4\tau_2^2}}{2\tau_2^2}.$$

В зависимости от соотношения весовых коэффициентов τ_1 и τ_2 корни z_1 и z_2 могут быть следующие.

1-й случай ($\tau_1^4 \geqslant 4\tau_2^2$). При этом

$$k_1 = \sqrt{z_1} = \left(\frac{\tau_1^2 + \sqrt{\tau_1^4 - 4\tau_2^2}}{2\tau_2^2}\right)^{1/2}, \qquad k_2 = -\sqrt{z_1} = -\left(\frac{\tau_1^2 + \sqrt{\tau_1^4 - 4\tau_2^2}}{2\tau_2^2}\right)^{1/2},$$

$$k_3 = \sqrt{z_2} = \left(\frac{\tau_1^2 - \sqrt{\tau_1^4 - 4\tau_2^2}}{2\tau_2^2}\right)^{1/2}, \qquad k_4 = -\sqrt{z_2} = -\left(\frac{\tau_1^2 - \sqrt{\tau_1^4 - 4\tau_2^2}}{2\tau_2^2}\right)^{1/2}.$$

В этом случае решение уравнения Эйлера (3) запишется в виде

$$\Theta = \sum_{i=1}^{4} C_i \ell^{k_i \omega}, \tag{5}$$

где C_i — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий, корни k_i, $i = \overline{1,4}$, — действительные и положительные. Определим C_i, $i = \overline{1,4}$. Если предположить, что система СВВ является устойчивой, то при $\omega \to \infty$ координата ошибки $\Theta \to 0$. А это означает, что $C_1 = C_3 = 0$. Постоянные интегрирования находим из начальных условий (при $\omega = 0$ $\Theta(0) = \Theta_0$, $\dot{\Theta}(0) = \dot{\Theta}_0$).

Подставим эти условия в (5) и получим $C_2 + C_4 = \Theta_0$, $k_2C_2 + k_4C_4 = -\dot{\Theta}_0$, откуда

$$C_2 = \frac{\dot{\Theta}_0 + \Theta_0\sqrt{z_2}}{\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1}}, \qquad C_4 = \frac{\dot{\Theta}_0 + \Theta_0\sqrt{z_1}}{\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}}.$$

С учетом полученных значений постоянных интегрирования C_i, $i = \overline{1,4}$, окончательное решение (5) уравнения Эйлера (3) имеет вид

$$\Theta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1}}[(\dot{\Theta}_0 + \Theta_0\sqrt{z_2})\ell^{-\omega\sqrt{z_1}} - (\dot{\Theta}_0 + \Theta_0\sqrt{z_1})\ell^{-\omega\sqrt{z_2}}] \tag{6}$$

и представляет собой экспоненту. Любая другая кривая $\Theta(\omega)$ не будет экстремалью функционала (2) при данном соотношении коэффициентов τ_1 и τ_2.

2-й случай ($\tau_1^4 < 4\tau_2^2$). Характеристическое уравнение (4) имеет две пары комплексно-сопряженных корней $k_{1,2}$ и $k_{3,4}$, имеющих вид

$$k_{1,2} = \alpha_0 \pm j\beta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}} \pm \frac{j\beta_0}{\sqrt{\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}}}\right);$$

$$k_{3,4} = -\alpha_0 \pm j\beta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}} \pm \frac{j\beta_0}{\sqrt{\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}}}\right).$$

С учетом этих корней решение уравнения (3) выражается соотношением

$$\Theta(\omega) = \ell^{\alpha_0\omega}(C_1\cos\beta_0\omega + C_2\sin\beta_0\omega) + \ell^{-\alpha_0\omega}(C_3\cos\beta_0\omega + C_4\sin\beta_0\omega). \tag{7}$$

Так же, как и в 1-м случае, предполагается СВВ устойчивой. Поэтому при $\omega \to 0$ координата $\Theta \to \infty$, что обусловливает равенство нулю постоянных интегрирования C_1 и C_2. Постоянные интегрирования C_3 и C_4 определяются из начальных условий $\Theta(0) = \Theta_0$, $\dot{\Theta}(0) = \dot{\Theta}_0$ следующими выражениями: $C_3 = \Theta_0$; $C_4 = (\dot{\Theta}_0 + \alpha_0\Theta_0)/\beta_0$. С учетом полученных постоянных интегрирования C_1 — C_4 при $\tau_1^4 < 4\tau_2^2$ решение (7) уравнения (3) имеет вид

$$\Theta(\omega) = \ell^{-\alpha_0\omega}\left(\Theta_0\cos\beta_0\omega + \frac{\dot{\Theta}_0 + \alpha_0\Theta_0}{\beta_0}\sin\beta_0\omega\right). \tag{8}$$

Любая другая экстремаль не будет экстремалью (8) функционала (2) при условии, что $\tau_1^4 < 2\tau_2^2$. Если величины весовых коэффициентов τ_1 и τ_2 менять, то можно получить семейство экстремалей, на основании которого можно осуществить выбор желаемой экстремали. Таким образом, выражения (6), (8) представляют собой оптимальные ФЧХ фазовой ошибки, удовлетворяющей минимуму функционала (2).

Получив оптимальные ФЧХ фазовой ошибки, перейдем к определению ФЧХ корректирующего звена СВВ, построенного на базе электродинамического виброиспытательного стенда [5, 6]. В замкнутой структуре СВВ соотношение фазовых углов между входным сигналом и сигналом отрицательной обратной связи в устройстве сравнения (разности сигналом) должно быть следующим (предполагается, что $U_{\text{вх}} = U_a\sin(\omega t - \varphi)$):

$$\omega t - \varphi = \omega t - \varphi \pm \varphi_{YY} + \varphi_{BC} + \varphi_{\text{ВД}} + \varphi_{OC} \pm \Delta\varphi \pm \varphi_{\text{КЗ}}, \tag{9}$$

где правая часть — суммарный фазовый угол управляющего устройства (УУ), например, предварительного усилителя и усилителя мощности ($\varphi_{\text{УУ}}$), вибростенда ($\varphi_{\text{ВС}}$), вибродатчика ($\varphi_{\text{ВД}}$), звена обратной связи ($\varphi_{\text{ОС}}$), заданной фазовой ошибки ($\Delta\varphi = \Theta$), корректирующего звена ($\varphi_{\text{КЗ}}$). Так как $U_{\text{вх}}$ проходит через весь тракт СВВ, то в суммарной фазе φ_{Σ} должна присутствовать фаза $U_{\text{вх}}$, т. е. $\omega t - \varphi$, что и показано в правой части (9). Из выражения (9) получаем

$$\pm\varphi_{YY} + \varphi_{BC} + \varphi_{\text{ВД}} + \varphi_{OC} \pm \Delta\varphi \pm \varphi_{\text{КЗ}} = 0.$$

Если предположить, что $\varphi_{YY} = \varphi_{\text{ВД}} = 0$, то ФЧХ корректирующего звена

$$\pm\varphi_{\text{КЗ}} = \varphi_{BC} + \varphi_{OC} \pm \Delta\varphi. \tag{10}$$

Из (10) видно, что ФЧХ корректирующего звена определяется как разность суммарной ФЧХ вибростенда (ВС), звена обратной связи (ОС) и оптимальной фазовой ошибки $\Theta = \Delta\varphi$. ФЧХ СВВ, как и любой системы, может определяться из выражения передаточной функции системы

$$W(j\omega) = R(\omega) + jI_m(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I_m^2(\omega)}\,\ell^{j\varphi(\omega)}, \tag{11}$$

где

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{I_m(\omega)}{R(\omega)}.$$

Для СВВ с ЭДВ передаточная функция имеет вид [5]

$$W_{BC}(p) = \frac{Bl}{(r + Lp)(mp^2 + bp + c) + B^2l^2p}, \tag{12}$$

где B — магнитная индукция в воздушном зазоре подвижной катушки; l — длина провода подвижной катушки; r — активное сопротивление провода l; L — индуктивность подвижной катушки; m — масса платформы совместно с испытуемым изделием; b, c — коэффициенты диссипации и жесткости соответственно; p — оператор d/dt. С учетом символического метода [7] в (12) вместо p введем $p = j\omega$. Тогда (12) примет вид, соответствующий выражению (11),

$$W_{BC}(j\omega) = \sqrt{R_C^2(\omega) + I_{mc}^2(\omega)} \cdot \ell^{-j\varphi_C(\omega)}, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
&R_{BC}(\omega) = \frac{Bl(rd - \omega^2 bl)}{(rd - \omega^2 bL)^2 + \omega^2(rb + Ld + B^2l^2)^2};\\
&I_{mBC}(\omega) = \frac{Bl\omega(rb + Ld + B^2l^2)}{(rd - \omega^2 bL)^2 + \omega^2(rb + Ld + B^2l^2)^2};\\
&d = C - m\omega^2;\\
&\varphi_{BC}(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{I_{mC}(\omega)}{R_C(\omega)} = \operatorname{arctg}\frac{\omega(rb + Ld + B^2l^2)}{rd - \omega^2 bL}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Получив ФЧХ СВВ с ЭДВ в виде (12) и оптимальные ФЧХ фазовой ошибки в виде (6) или (8), можно найти ФЧХ корректирующих звеньев в системе СВВ с ЭДВ в виде

$$\varphi_{\text{КЗ}}(\omega) = \varphi_{OC\Sigma} - \Theta(\omega) = \varphi_{BC}(\omega) + \varphi_{OC}(\omega) - \Theta(\omega). \tag{15}$$

Выражение (15) с учетом (14), (6) или (8) отражает оптимальную ФЧХ корректирующих звеньев СВВ с ЭДВ в функции параметров ЭДВ и весовых коэффициентов τ_1, τ_2 функционала (2).

Для СВВ с разными типами вибростендов ФЧХ будут отличаться друг от друга и ФЧХ фазовой ошибки будут разными. Поэтому ФЧХ корректирующих звеньев также будут разными, но соответствовать конкретным СВВ в целом.

1. *Тимофеев В. А.* Инженерные методы расчета и исследования динамических систем. – Ленинград: Энергия, 1967. – 147 с.
2. *Фельдбаум А. А., Дудыкин А. Д., Мановцев А. П. и др.* Теоретические основы связи и управления. – Москва: Физматгиз, 1963. – 932 с.
3. *Цлаф Л. Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1966. – 176 с.
4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – Москва: Наука, 1969. – 424 с.
5. *Божко А. Е.* Воспроизведение вибраций. – Киев: Наук. думка, 1975. – 191 с.
6. *Божко А. Е., Пермяков В. И., Пушня В. А.* Методы проектирования электромеханических вибровозбудителей. – Киев: Наук. думка, 1989. – 206 с.
7. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 12.02.2007