Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 517.4

Дж. Базарган

Прямая и обратная задача рассеяния на всей оси для одномерного оператора Шредингера с потенциалом типа ступеньки

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

The scattering problem is considered on the whole axis for a one-dimensional Schrödinger operator with potential which tends to different limits at $\pm\infty$. The scattering data are defined, and their properties are studied. The necessary and sufficient conditions for the reconstruction of the potential by these data are found.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L[y](x) = \lambda y, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

на всей вещественной оси, где $L = -d^2/dx^2 + q(x)$ — одномерный оператор Шредингера с вещественным потенциалом $q(x)$ типа ступеньки, удовлетворяющим условиям

$$\int\limits_{-\infty}^{0} (1+|x|)|q(x)+c|\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} (1+|x|)|q(x)|\,dx < \infty, \qquad c > 0. \tag{2}$$

Введем такие "фоновые" операторы $L_\pm = -d^2/dx^2 + q_\pm$, где

$$q_- = -c, \qquad q_+ = 0. \tag{3}$$

Обозначим спектры операторов $L_\pm$ через $\sigma_\pm$, т. е.

$$\sigma_- = [-c, +\infty), \qquad \sigma_+ = [0, +\infty). \tag{4}$$

Проведем разрезы вдоль спектров $\sigma_\pm$ на комплексной плоскости и обозначим через $\sigma_\pm^{\text{в}}$, $\sigma_\pm^{\text{н}}$ верхние и нижние берега разрезов соответственно.

Определим на $\sigma_\pm$ функции

$$\rho_-(\lambda) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda + c}}, \qquad \rho_+(\lambda) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda}}, \tag{5}$$

причем выберем ветви корней так, что $\rho_\pm(\lambda) > 0$ при $\lambda \in \sigma_\pm^{\text{в}} \setminus \inf \sigma_\pm$. Эти функции являются спектральными мерами операторов $L_\pm$.

При всех значениях $\lambda \in \sigma_\pm$ существуют операторы преобразования, которые переводят решения Йоста $\psi_-(x,\lambda) = \exp(-i\sqrt{\lambda + c}x)$, $\psi_+(x,\lambda) = \exp(i\sqrt{\lambda}x)$ уравнений $L_\pm[y](x) = \lambda y$ в решения Йоста $\varphi_\pm(x,\lambda)$ уравнения (1), представимые в виде

$$\varphi_\pm(x,\lambda) = \psi_\pm(x,\lambda) \pm \int\limits_x^{\pm\infty} K_\pm(x,y)\psi_\pm(y,\lambda)\,dy, \qquad \pm x \leqslant \pm y, \tag{6}$$

где $K_\pm(x,y)$ — вещественные и быстро убывающие функции. Ядра операторов преобразования связаны с потенциалом соотношениями

$$\mp\frac{d}{dx}K_\pm(x,x) = q(x) - q_\pm. \tag{7}$$

Лемма 1. *Спектр σ оператора L состоит из абсолютно непрерывного σ_{ac} и дискретного σ_{d} спектров, т. е.*

$$\sigma = \sigma_{\text{ac}} \bigcup \sigma_{\text{d}},$$

где

$$\sigma_{\text{ac}} = \sigma_-, \qquad \sigma_{\text{d}} = \{\lambda_k \colon \lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \sigma_-,\ k = 1,\ldots,p\}.$$

Спектр оператора L однократен на $\sigma^{(1)} = [-c, 0]$ и двукратен на $\sigma^{(2)} = \sigma_+ = \mathbb{R}_+$.

В точках дискретного спектра определим $2p$ положительных чисел $m_k^\pm = \|\varphi_\pm(\lambda_k)\|_{L^2}^{-1}$, $k = 1,\ldots,p$. Введем функцию

$$\omega(\lambda) = \langle\varphi_-(x,\lambda), \varphi_+(x,\lambda)\rangle, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_-.$$

Следующая лемма описывает ее свойства.

Лемма 2. *а) Функция $\omega(\lambda)$ является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \sigma_-$, непрерывна вплоть до границы $\sigma_-^{\text{в}} \bigcup \sigma_-^{\text{н}}$ и обладает свойством симметрии*

$$\omega(\lambda^{\text{в}}) = \overline{\omega(\lambda^{\text{н}})}, \qquad \lambda^{\text{в,н}} \in \sigma_-^{\text{в,н}}.$$

$\omega(\lambda) \in \mathbb{R}$ вещественна при всех $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma_-$.

б) Функция $\omega(\lambda)$ имеет конечное число нулей в точках λ_k, $k = 1,\ldots,p$, и, возможно, в точке $\lambda = -c$ и не обращается в нуль ни в каких других точках комплексной плоскости. Нули λ_k простые, причем справедливы следующие равенства:

$$\left[\left.\frac{d\omega(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda_k}\right]^2 = \frac{1}{(m_k^- m_k^+)^2}, \qquad k = 1,\ldots,p.$$

в) В некоторой окрестности точки $\lambda = -c$ функция $\sqrt{\lambda + c}\,[\omega(\lambda)]^{-1}$ ограничена.

При $\lambda \in \sigma_-^{\text{в,н}}$ пары $\varphi_-(x,\lambda^{\text{в}})$, $\varphi_-(x,\lambda^{\text{н}})$ $(=\overline{\varphi_-(x,\lambda^{\text{в}})})$, а при $\lambda \in \sigma_+^{\text{в,н}}$ пары $\varphi_+(x,\lambda^{\text{в}})$, $\varphi_+(x,\lambda^{\text{н}})$ $(=\overline{\varphi_+(x,\lambda^{\text{в}})})$ образуют линейно независимые решения уравнения (1) и, следовательно, справедливы соотношения

$$T_\pm(\lambda)\varphi_\mp(x,\lambda) = \overline{\varphi_\pm(x,\lambda)} + R_\pm(\lambda)\varphi_\pm(x,\lambda), \qquad \lambda \in \sigma_\pm^{\text{в,н}}. \tag{8}$$

Здесь $R_\pm(\lambda)$ — коэффициенты отражения, а $T_\pm(\lambda)$ — соответствующие им коэффициенты прохождения. Эти коэффициенты образуют матрицу рассеяния

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} R_+(\lambda) & T_+(\lambda) \\ R_-(\lambda) & T_-(\lambda) \end{pmatrix},$$

которая обладает следующими свойствами:

Теорема 1. *I. Функции $T_\pm(\lambda)$ и $R_\pm(\lambda)$ непрерывны во внутренних точках множеств $\sigma_\pm^{\text{в,н}} \subset \mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям*

(а) $T_\pm(\lambda^{\text{в}}) = \overline{T_\pm(\lambda^{\text{н}})}, \qquad R_\pm(\lambda^{\text{в}}) = \overline{R_\pm(\lambda^{\text{н}})}, \qquad \lambda^{\text{в,н}} \in \sigma_\pm^{\text{в,н}},$

(б) $1 - |R_\pm(\lambda)|^2 = \dfrac{\rho_\pm(\lambda)}{\rho_\mp(\lambda)}|T_\pm(\lambda)|^2, \qquad \lambda \in \sigma_+^{\text{в,н}},$

где $\rho_\pm(\lambda)$ — функции, определенные формулой (5),

(в) $\overline{R_\pm(\lambda)}T_\pm(\lambda) = -R_\mp(\lambda)\overline{T_\pm(\lambda)}, \qquad \lambda \in \sigma_+^{\text{в,н}},$

(г) $R_-(\lambda) = \dfrac{T_-(\lambda)}{\overline{T_-(\lambda)}}, \qquad \lambda \in (-c, 0]^{\text{в,н}},$

(д) $T_\pm(\lambda) = 1 + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \qquad R_\pm(\lambda) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \qquad |\lambda| \to \infty.$

II. Функции $T_\pm(\lambda)$ допускают аналитическое продолжение в область $\mathbb{C} \setminus \sigma_-$ как мероморфные функции и удовлетворяют следующему тождеству вплоть до границы:

$$\frac{T_-(\lambda)}{2i\sqrt{\lambda + c}} = \frac{T_+(\lambda)}{2i\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\omega(\lambda)},$$

где $\omega(\lambda)$ удовлетворяет всем свойствам, перечисленным в лемме 2.

Из равенства (6) и соотношения рассеяния (8) следует, что операторы преобразования удовлетворяют интегральному уравнению Марченко

$$K_\pm(x,y) + F_\pm(x,y) \pm \int\limits_x^{\pm\infty} K_\pm(x,t)F_\pm(t,y)\,dt = 0, \qquad \pm x < \pm y, \tag{9}$$

где

$$F_+(x,y) = \int\limits_{-c}^{0} |T_-(\lambda)|^2 e^{i\sqrt{\lambda}(x+y)} \rho_-(\lambda)\,d\lambda + 2\,\mathrm{Re}\int\limits_{0}^{+\infty} R_+(\lambda) e^{i\sqrt{\lambda}(x+y)} \rho_+(\lambda) d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} e^{i\sqrt{\lambda_k}(x+y)} (m_k^+)^{-2}, \tag{10}$$

$$F_-(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\int\limits_{-c}^{+\infty} R_-(\lambda) e^{-i\sqrt{\lambda+c}(x+y)} \rho_-(\lambda)\,d\lambda + \sum_{k=1}^{p} e^{-i\sqrt{\lambda_k+c}(x+y)} (m_k^-)^{-2}.$$

Из уравнения (9) и соотношений (7) и (2) вытекает, что:

III. Функции $F_\pm(x,y)$ абсолютно непрерывны и при всех $a > -\infty$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\Bigl|\int\limits_{a}^{\pm\infty} |F_\pm(x,x)|\,dx\Bigr| < \infty, \qquad \Bigl|\int\limits_{a}^{\pm\infty} (1+|x|)\Bigl|\frac{d}{dx}F_\pm(x,x)\Bigr|\,dx\Bigr| < \infty. \tag{11}$$

Введем данные рассеяния задачи (1), (2),

$$\{R_\pm(\lambda),\ T_\pm(\lambda),\ \lambda \in \sigma_\pm^{\text{в,н}},\ \lambda_k \in \mathbb{R}\setminus\sigma_-,\ m_k^\pm > 0,\ k = 1,\ldots,p\}. \tag{12}$$

Оказывается, что условия *I–III* являются необходимыми и достаточными для того, чтобы совокупность (12) была данными рассеяния задачи (1), (2). Необходимость была установлена выше (в теореме 1 и в условии *III*). Достаточность вытекает из лемм 3, 4.

Лемма 3. *Если выполнены условия I и III, то интегральные уравнения* (9) *с ядрами $F_\pm(x,y)$, определенные формулами* (10)*, однозначно разрешимы в классе вещественных непрерывно дифференцируемых функций $K_\pm(x,y)$, причем для этих функций справедливы следующие оценки:*

$$\Bigl|\int\limits_{x}^{\pm\infty} (1+|y|)\Bigl|\frac{d}{dy}K_\pm(y,y)\Bigr|\,dy\Bigr| < \infty. \tag{13}$$

Решим уравнения обратной задачи (9) относительно $K_\pm(x,y)$ и положим

$$q_-(x) = \frac{d}{dx}K_-(x,x) - c, \qquad q_+(x) = -\frac{d}{dx}K_+(x,x). \tag{14}$$

Из леммы 3 и оценки (13), записанной для функции $K_\pm(x,y)$, следует, что

$$\Bigl|\int\limits_{a}^{\pm\infty} (1+|x|)|q_\pm(x) - q_\pm|\,dx\Bigr| < \infty.$$

Кроме того, функции $\varphi_\pm(x,\lambda)$, построенные по формуле (6), являются решениями Йоста уравнений

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + q_\pm(x)y = \lambda y(x)$$

с потенциалами (14).

Лемма 4. *Если выполнено также условие II теоремы 1, то потенциалы* $q_-(x)$ *и* $q_+(x)$ *совпадают, т. е.* $q_-(x) = q_+(x)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Данные* (12)*, обладающие свойствами I–III являются данными рассеяния задачи* (1)–(4) *с потенциалом* $q(x) := q_-(x) = q_+(x)$*, определенным по любой из формул* (7).

Впервые обратная задача рассеяния для одномерного оператора Шредингера с потенциалом $q(x)$ типа ступеньки рассматривалась в работе Буслаева и Фомина [1]. Авторы применили метод, развитый Фаддеевым [2, 3], и нашли необходимые и достаточные условия на данные рассеяния, когда потенциал стремится к своим пределам так, что существуют первые моменты на отрицательной и положительной полуосях. Однако в работе [4] было указано на неточность в характеризации данных рассеяния, приведенных в [1], были определены необходимые и достаточные условия на данные рассеяния в случае существования второго момента. В случае существования только первого момента (см. [5]), необходимые и достаточные условия, указанные в работе [4], не совпадают между собой. Подобные вопросы изучались также в работах [6, 7].

В настоящей работе решается задача восстановления потенциала $q(x)$, суммируемого с первым моментом по заданным матрице рассеяния $S(\lambda)$ и p произвольным положительным числам (m_k^- либо m_k^+, $k = 1, \ldots, p$), соответствующим полюсам коэффициентов прохождения. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы $S(\lambda)$ была матрицей рассеяния задачи (1), (2). При этом важную роль в характеризации данных рассеяния играет предлагаемое нами новое условие *б* леммы 2, входящее в условие *II* теоремы 1.

1. *Буслаев В., Фомин В.* К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1962. – № 1. – С. 56–64.
2. *Фаддеев Л. Д.* О связи S-матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера // Докл. АН СССР. – 1958. – **120**, № 1. – С. 63–66.
3. *Фаддеев Л. Д.* Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1964. – **73**. – С. 314–336.
4. *Cohen A., Kappeler Th.* Scattering and inverse scattering for steplike potentials in the Schrödinger equation // Indiana Univ. Math. J. – 1985. – **34**, No 1. – P. 127–180.
5. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 331 с.
6. *Андерс И. А., Котляров В. П.* Характеризация данных рассеяния операторов Шредингера и Дирака // Теорет. и мат. физика. – 1991. – **88**, № 1. – С. 72–84.
7. *Actosun T.* On the Schrödinger equation with steplike potentials // J. Math. Phys. – 1999. – **40**, No 11. – P. 5289–5305.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 06.11.2007