

всех $t \in T_{a,t_0}$, как только $\rho_1(a, M_1) < \beta_1$. Отсюда следует, что пара (S_1, M_1) экспоненциально M_y -устойчива в целом.

Этим завершено доказательство всех утверждений теорем 1 и 2.

1. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. – Ленинград: Изд-во Ленинград. гос. ун-та, 1957. – 238 с.
2. Michel A. N., Wang K., Hu B. Qualitative theory of dynamical systems. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 707 p.
3. Мартынюк А. А. Об устойчивости движения разрывных динамических систем // Докл. АН. – 2004. – 397 (3). – С. 308–312.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 04.10.2007

УДК 539.3

© 2008

Л. В. Назаренко

Деформативные свойства трансверсально-изотропных композитов с учетом долговременной повреждаемости при экспоненциально-степенной функции микродолговечности

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л. П. Хорошунюм)

The theory of long-term damageability for homogeneous materials is generalized to the case of discrete-fiber composite materials of stochastic structure. The equations of mechanics of micrononuniform media of stochastic structure are put in a basis of the theory. The process of damageability of components of a composite is modeled by the appearance of stochastically located micropores. The criterion of the destruction of an individual microvolume is characterized by its long-term durability determined by dependence of the time of fragile destruction on a degree of closeness of an equivalent stress to its limiting value, describing the short-term durability by the Huber–Mises criterion which is taken as a stochastic function of coordinates. Effective deformative properties and the stress strain state of a discrete-fiber composite with microdamages in components are determined on the basis of the stochastic equations of elasticity of discrete-fiber media with porous components. An algorithm of calculation of dependences of microdamageability of components of a discrete-fiber material and macrostresses or macrodeformations on time are constructed, and the corresponding curves are obtained in the case of an exponential-power function of microdurability.

Структурная теория длительной повреждаемости однородного материала, построенная на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред, изложена в работе [1] и обобщена для зернистых композитов. В настоящей работе теория длительной повреждаемости при экспоненциально-степенной функции микродолговечности обобщается на случай композитного материала, армированного однонаправленными сфероидальными волокнами.

Предполагается, что матрица является изотропной, в то время как включения обладают трансверсально-изотропной симметрией упругих свойств. Рассматривается случай, когда процесс повреждаемости происходит в матрице рассматриваемого композита. В основу структурной теории длительной повреждаемости композитных материалов положены уравнения механики микронеоднородных сред стохастической структуры.

Процесс повреждаемости матрицы рассматриваемого композита моделируется разрушением рассеянных микрообъемов материала и образованием на их месте стохастически расположенных микропор [2]. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, описываемой экспоненциально-степенной функцией микродолговечности, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Губера–Мизеса [3]. Предел кратковременной прочности принимается случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается распределением Вейбулла [2]. Эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние композита стохастической структуры определяются на основе стохастических уравнений упругости методом условных моментов [2].

Построен алгоритм вычисления микроповреждаемости матрицы дискретно-волокнистого композита как функции времени, а также макронапряжений и макродеформаций от времени. Получены соответствующие кривые в случае экспоненциально-степенной функции микродолговечности.

1. Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную случайно расположенными однонаправленными дискретными волокнами. Предполагается, что матрица изотропная, а включения трансверсально-изотропные, причем в процессе нагружения в матрице возникают микроразрушения, которые моделируются случайно расположенными пустыми микропорами квазисферической формы. Макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформации $\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle$ композита связаны законом Гука:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ij\alpha\beta}^* \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle. \quad (1)$$

Здесь $\lambda_{ij\alpha\beta}^*$ — тензор эффективных упругих модулей, который является функцией тензора упругих модулей поврежденных компонентов $\lambda_{ij\alpha\beta}^{[1]}$, $\lambda_{ij\alpha\beta}^{[2]}$, их объемных концентраций c_1 , c_2 и параметров формы включений, причем индексы 1 и 2 обозначают соответственно включения и матрицу. Тензор эффективных модулей упругости $\lambda_{ij\alpha\beta}^*$ дискретно-волокнистого композита с трансверсально-изотропными компонентами можно определить как функцию модулей упругости поврежденных компонентов $\lambda_{ij\alpha\beta}^{[1]}$, $\lambda_{ij\alpha\beta}^{[2]}$, объемного содержания включений c_1 в матрице и параметров формы включений t на основании соотношений [4]:

$$\lambda_{ij\alpha\beta}^* = \lambda_{ij\alpha\beta}^*(\lambda_{ij\alpha\beta}^{[1]}, \lambda_{ij\alpha\beta}^{[2]}, c_1, t), \quad t = \frac{t_2}{t_1}. \quad (2)$$

где t_1 , t_2 — размеры полуосей сфероидальных включений в поперечном и продольном направлениях соответственно.

Тензоры модулей упругости поврежденных компонентов $\lambda_{ij\alpha\beta}^{[1]}$, $\lambda_{ij\alpha\beta}^{[2]}$ определяются [5] через тензоры модулей упругости скелетов компонентов $\lambda_{ij\alpha\beta}^1$, $\lambda_{ij\alpha\beta}^2$ и их пористости p_1 , p_2 , характеризующие поврежденность, т. е.

$$\lambda_{ij\alpha\beta}^{[1]} = \lambda_{ij\alpha\beta}^{[1]}(\lambda_{ij\alpha\beta}^1, p_1), \quad \lambda_{ij\alpha\beta}^{[2]} = \lambda_{ij\alpha\beta}^{[2]}(\lambda_{ij\alpha\beta}^2, p_2). \quad (3)$$

На основе зависимостей (2), (3) и соотношений

$$\langle \sigma_{ij}^r \rangle = \lambda_{ij\alpha\beta}^{[r]} \langle \varepsilon_{\alpha\beta}^r \rangle \quad (r = 1, 2) \quad (4)$$

можно определить средние напряжения и средние деформации поврежденного r -компонента $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$, $\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^r \rangle$ как функции макродеформаций или макронапряжений [4]:

$$\langle \sigma_{ij}^r \rangle = f_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle), \quad \langle \varepsilon_{ij}^r \rangle = f_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle), \quad \langle \sigma_{ij}^r \rangle = f_3(\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle), \quad \langle \varepsilon_{ij}^r \rangle = f_4(\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle). \quad (5)$$

Средние по скелету r -компонента напряжения $\bar{\sigma}_{ij}^r$ ($r = 1, 2$) связаны со средними напряжениями $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$ поврежденного r -компонента зависимостями:

$$\bar{\sigma}_{ij}^r = \frac{1}{1 - p_r} \langle \sigma_{ij}^r \rangle \quad (r = 1, 2). \quad (6)$$

Для случая, когда процесс накопления повреждений происходит в матрице, примем критерий кратковременного разрушения в микрообъеме неповрежденной части материала матрицы в форме Губера–Мизеса [2]

$$I_{\bar{\sigma}}^2 = k_2; \quad I_{\bar{\sigma}}^2 = (\bar{\sigma}_{ij}^2 \bar{\sigma}_{ij}^2)^{1/2}, \quad (7)$$

где $\bar{\sigma}_{ij}^2$ — девиатор средних по неповрежденной части материала матрицы напряжений; k_2 — предельное значение инварианта $I_{\bar{\sigma}}^2$, являющееся случайной функцией координат [2].

Если инвариант $I_{\bar{\sigma}}^2$ для некоторого микрообъема материала матрицы не достигает соответствующего предельного значения k_2 , то, согласно критерию длительной прочности, разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ_k^2 , длительность которого зависит от степени близости $I_{\bar{\sigma}}^2$ к предельному значению k_2 . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k^2 = \varphi(I_{\bar{\sigma}}^2, k_2), \quad (8)$$

причем $\varphi(k_2, k_2) = 0$, $\varphi(0, k_2) = \infty$ согласно (7).

Одноточечную функцию распределения $F(k_2)$ параметра k_2 можно описывать распределением Вейбулла [2]:

$$F(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_{02}; \\ 1 - \exp(-m_2(k_2 - k_{02})^{\alpha_2}), & k_2 \geq k_{02}, \end{cases} \quad (9)$$

где k_{02} — минимальная величина предельного значения k_2 , с которого начинается разрушение в некоторых микрообъемах материала матрицы; m_2 , α_2 — постоянные, характеризующие разброс микропрочности в материале.

Пусть до начала деформирования композита начальная микроповрежденность матрицы характеризуется пористостью p_{02} . Тогда функция распределения $F(k_2)$, согласно свойству эргодичности, определяет относительное содержание материала неразрушенной части матрицы, где предел микропрочности меньше соответствующего значения k_2 . Поэтому, если в неразрушенной части материала матрицы напряжения равны $\bar{\sigma}_{ij}^2$, то функция $F(I_{\bar{\sigma}}^2)$ определяет, согласно (7), (9), относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета матрицы. Тогда уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости имеет вид [2]:

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02})F(I_{\bar{\sigma}}^2). \quad (10)$$

Если напряжения в матрице $\bar{\sigma}_{jk}^2$ действуют в течение некоторого времени t , то, согласно критерию длительной прочности (8), за это время разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_2 , для которых имеет место неравенство

$$t \geq \tau_k^2 = \varphi(I_{\bar{\sigma}}^2, k_2), \quad (11)$$

где инвариант $I_{\bar{\sigma}}^2$ определяется выражениями (7).

Если время τ_k^2 хрупкого разрушения для реальных материалов имеет конечное значение для произвольных $I_{\bar{\sigma}}^2$, что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию микродолговечности $\varphi(I_{\bar{\sigma}}^2, k_2)$ можно представить экспоненциально-степенной зависимостью [1]

$$\varphi(I_{\bar{\sigma}}^2, k_2) = \tau_{02} \left\{ \exp l_2 \left[\left(\frac{k_2}{I_{\bar{\sigma}}^2} \right)^{n_1} - 1 \right] - 1 \right\}^{n_2}, \quad (12)$$

имеющей достаточное число постоянных τ_{02} , l_2 , n_1 , n_2 для аппроксимации экспериментальных кривых. Подставляя (12) в (11), приходим к неравенству

$$k_2 \leq I_{\bar{\sigma}}^2 \left[1 + \frac{1}{l_2} \ln(1 + \bar{t}_2^{1/n_2}) \right]^{1/n_1} \quad \left(\bar{t}_2 = \frac{t}{\tau_{02}} \right). \quad (13)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F(k_2)$, приходим к выводу, что функция $F[I_{\bar{\sigma}}^2 \psi(\bar{t}_2)]$, где

$$\psi(\bar{t}_2) = \left[1 + \frac{1}{l_2} \ln(1 + \bar{t}_2^{1/n_2}) \right]^{1/n_1}, \quad (14)$$

определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов не разрушенной до нагружения части материала матрицы в момент времени \bar{t}_2 . Тогда с учетом (6) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости при длительной повреждаемости можно представить в виде

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02}) F \left[\frac{I_{\langle \sigma \rangle}^2}{1 - p_2} \psi(\bar{t}_2) \right], \quad (15)$$

где пористость p_2 является функцией безразмерного времени \bar{t}_2 , а инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}$ определяется выражением (7) и является функцией макродеформаций или макронапряжений согласно (5).

Уравнения баланса пористости (15) с учетом (7), (14) в начальный момент $\bar{t}_2 = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала. С ростом времени уравнения (15), (7), (14) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной поврежденности, развивающейся во времени.

2. На основе соотношений (2), (3), (7), (14), (15) можно определить объемное содержания микроповреждений дискретно-волокнутого композита с трансверсально-изотропными включениями в матрице и напряженно-деформированное состояние для функции $\psi(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (14), как при заданных макронапряжениях $\langle \sigma_{jk} \rangle$, так и при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$. В качестве включений и матрицы взяты соответственно кварц с характеристиками неповрежденной части

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^1 &= 118,4 \text{ ГПа}, & \lambda_{33}^1 &= 107 \text{ ГПа}, & \lambda_{13}^1 &= 32 \text{ ГПа}, \\ \lambda_{12}^1 &= 19 \text{ ГПа}, & \lambda_{44}^1 &= 35,8 \text{ ГПа} \end{aligned} \quad (16)$$

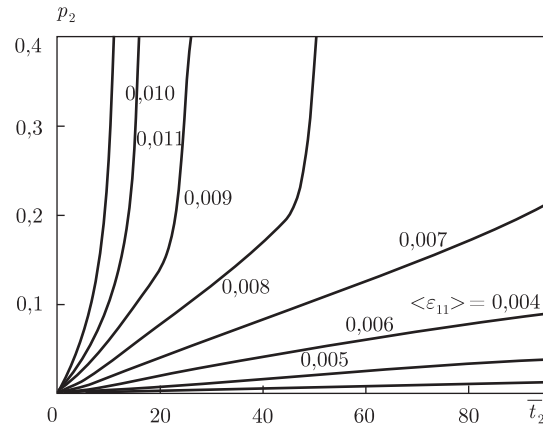


Рис. 1. Зависимость пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 при различных значениях макронапряжения

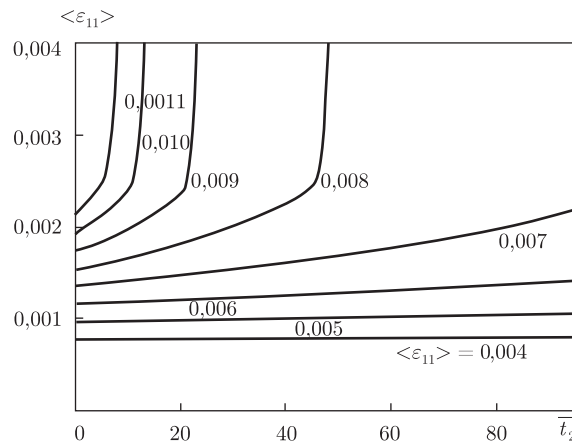


Рис. 2. Зависимость макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ от времени \bar{t}_2 при различных значениях макронапряжения

и эпоксидная матрица с характеристиками неповрежденной части

$$E^2 = 3 \text{ ГПа}; \quad \nu^2 = 0,35, \quad (17)$$

объемной концентрации включений, начальном содержании пор в матрице и форме включений

$$c_1 = 0,25; 0,5; 0,75, \quad p_{02} = 0, \quad t = 2. \quad (18)$$

а также при

$$k_{02} = 0,011 \text{ ГПа}; \quad m_2 = 1000; \quad \alpha_2 = 2; \quad l_2 = 1, \quad n_1 = 1; \quad n_2 = 1. \quad (19)$$

На рис. 1 изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 для объемного содержания включений $c_1 = 0,25$ при различных значениях макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$. На рис. 2 показаны кривые зависимостей макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ от времени \bar{t}_2 для объемных содержаний включений $c_1 = 0,25$ при различных значениях макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$. Как видим, при всех значениях макронапряжений $\langle \sigma_{11} \rangle$ для определенных значений времени \bar{t}_2 макродеформации и поврежденность матрицы достигают критической величины, являющейся началом разрушения материала.

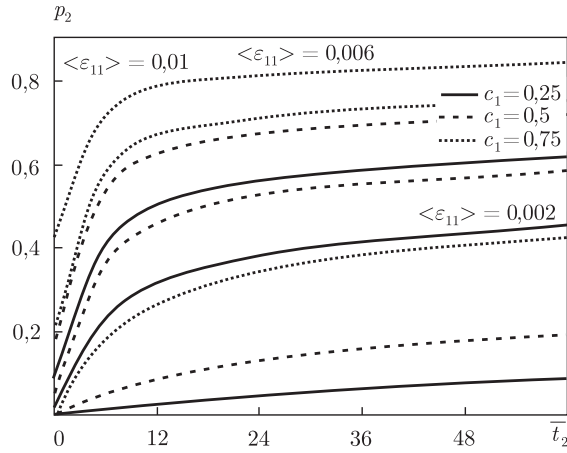


Рис. 3. Зависимость пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 при различных значениях макродеформации

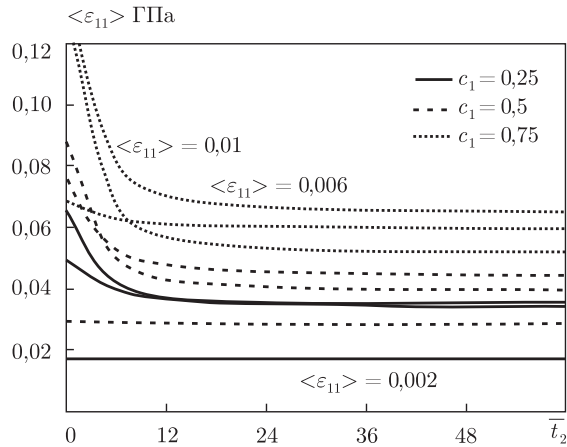


Рис. 4. Зависимость макронапряжения $\langle \sigma_{jk} \rangle$ от времени \bar{t}_2 при различных значениях макродеформации

Сравнение результатов, полученных для экспоненциально-степенной функции микродолговечности (12) с результатами для дробно-степенной функции микродолговечности показывает, что при заданных макропараметрах характер зависимостей макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ от времени \bar{t}_2 и зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 различен. В случае дробно-степенной функции микродолговечности для макронапряжений, меньших определенных значений, кривые этих зависимостей имеют горизонтальную асимптоту, тогда как в случае экспоненциально-степенной функции микродолговечности для всех значений макронапряжений макродеформации и поврежденность матрицы достигают критической величины, являющейся началом разрушения.

На рис. 3 изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 при значениях макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0,002, 0,006, 0,01$ и различных значениях объемного содержания включений c_1 . На графиках сплошной линией показаны кривые при объемном содержании включений $c_1 = 0,25$, штриховой — при $c_1 = 0,5$, пунктирной — при $c_1 = 0,75$. Такие же обозначения приняты и на рис. 4.

Графики показывают, что с увеличением макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для всех объемных содержаний включений и произвольного значения времени \bar{t}_2 микроповрежденность p_2 уве-

личивается. Здесь наблюдается рост поврежденности со временем, в то время как в экспериментах с полимерами [6] при фиксированной деформации поврежденность заметным образом не изменяется. Такое расхождение можно объяснить как релаксацией напряжений в полимерах, обусловленной ползучестью, которая здесь не учитывается, так и приближенностью рассматриваемой модели повреждаемости в конечно временной форме.

На рис. 4 показаны кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ от времени \bar{t}_2 при значениях макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0,002, 0,006, 0,01$ и различных значениях объемного содержания включений c_1 . Как видим, при всех значениях объемного содержания включений кривые являются нисходящими.

Сравнение результатов, полученных для экспоненциально-степенной функции микродолговечности (12) с результатами для дробно-степенной функции микродолговечности [2] показывает, что при заданных макродеформациях характер зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ от времени \bar{t}_2 и зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 в обоих случаях одинаков.

1. *Khoroshun L. P.* Principles of the micromechanics of material damage. 2. Long-term damage // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, No 2. – P. 127–135.
2. *Khoroshun L. P.* Micromechanics of short-term thermal microdamageability // *Ibid.* – 2001. – **37**, No 9. – P. 1158–1165.
3. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 312 с.
4. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шижула Е. Н., Назаренко Л. В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12-ти т. Т. 3).
5. *Назаренко Л. В.* Thermoelastic properties of orthotropic porous materials // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, № 2. – P. 114–122.
6. *Тамуж В. П., Куксенко В. С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 29.10.2007