7. *Хакен Г.* Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – Москва: Мир, 1985. – 424 с.
8. *Haddad W. M., Chellaboina V., Nersesov S. G.* Impulsive and Hybrid Dynamical Systems. Stability, Dissipativity and Control. – Princeton: Princeton University Press, 2006. – 504 p.
9. *Lobas L. G., Koval'chuk V. V., Bambura O. V.* Evolution of the Equilibrium States of an Inverted Pendulum // Int. Apl. Mech. – 2007. – **43**, No 4. – P. 121–129.
10. *Мартынюк А. А., Никитина Н. В.* Нахождение предельного значения энергии двойного математического маятника // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 9. – С. 106–114.

Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 27.11.2007

УДК 534.232.001.11

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О понятиях “среднее и действующее значения вибрации”

The notions of mean and effective values of vibrations are substantiated.

В работах по теории колебаний, например [1, 2], рассматриваются осредненные характеристики механических колебаний, такие, как среднее значение, среднее абсолютного значения и среднее квадратичное значение за период колебательного процесса. Однако достаточного объяснения целесообразности этих значений не приводится. Понятно, что среднее значение гармонического колебания $x = x_a \sin \omega t$, где x_a — амплитуда; ω — круговая частота; t — время за период $T = 2\pi/\omega$, определяемое формулой $x_{\text{ср}} = \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T x_a \sin \omega t \, dt = 0$. Это среднее значение выводится чисто математически и в практике исследования механических колебаний является бесполезным. Другое дело среднее абсолютного значения

$$U_{\text{ср.абс}} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T |x(t)| \, dt, \tag{1}$$

которое физически отражает действие механических гармонических колебаний в виде двух их полуволн. В теоретических основах электротехники [3] для гармонических токов и напряжений формула (1) модернизирована в виде

$$x_{\text{ср}} = \frac{2}{T}\int\limits_0^{T/2} x(t) \, dt = \frac{2}{T}\int\limits_0^{T/2} x_a \sin \omega t \, dt = \frac{2x_a}{\pi}. \tag{2}$$

В этой формуле берется среднее значение за каждый полупериод $T/2$, равное π/ω. С точки зрения воздействия вибрации (механического колебания) $x(t) = x_a \sin\omega t$ на какой-то объект даже в течение периода T этот объект ощущает в среднем в каждый полупериод $T/2$ действие этой вибрации в виде x_a/π и за период $2x_a/\pi$, а не нуль. Поэтому, как и в электротехнике, формула (2) должна быть основополагающей. Следует также обратить внимание на среднее квадратичное значение вибрации

$$x_{\text{ср.кв}} = \left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T x^2(t)\,dt\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T (x_a \sin\omega t)^2\,dt\right) = \frac{x_a}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

В электротехнике это значение называется действующим, или эффективным значением переменного тока, и это такое значение постоянного тока, при прохождении которого рассеивание тепловой энергии на сопротивлении R за период $T = (2\pi/\omega)I_g^2RT$ равно энергии рассеивания тепловой энергии переменного тока $i = I_a \sin\omega t$. То же относится и к напряжению $U = U_a \sin\omega t$. Для вибрации эти действующие значения могут несколько отличаться в интерпретации от приведенной формулы. Рассеивание энергии при механических колебаниях — это поглощение или диссипация энергии в результате действия в колебательной системе (КС) сил сопротивления. Так как понятие действующего значения тока относится к вынужденным режимам работы схем, то и в нашем случае будем относить это понятие к вынужденным колебаниям систем.

Рассеяние энергии, связанное с вынужденными колебаниями, определяется работой диссипативной силы $F_g = b\dot{x}(t)$, которая для каждого периода колебаний $T = 2\pi/\omega$ определяется выражением

$$\Delta E_T = \int\limits_0^{2\pi/\omega} F_g \cdot \dot{x}\,dt = \int\limits_0^{2\pi/\omega} b\dot{x}^2\,dt, \tag{4}$$

где b — коэффициент диссипации в КС.

Подставляя в (4) $\dot{x}(t) = -x_a\omega \sin\omega t$, получим

$$\Delta E_T = \pi b\omega x_a^2. \tag{5}$$

Из (4) и (5) видно, что при установившихся колебаниях источник вынуждающей силы должен пополнять энергию КС в каждый период колебаний в количестве, определяемом (5). Дифференциальное уравнение движения КС с одной степенью свободы имеет вид

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F,$$

где m — масса; c — коэффициент жесткости; $F = F_a \sin\omega t$.

В электротехнике действующим значением переменных тока или напряжения является постоянное эквивалентное по энергии рассеяния значение этих величин. Для колебаний КС может быть постоянная скорость $\dot{x}$. Тогда запишем равенство

$$\int\limits_0^{2\pi/\omega} b\dot{x}_g^2\,dt = \pi b\omega x_a^2 \qquad \text{или} \qquad b\dot{x}_g^2 t\Big|_0^{2\pi/\omega} = \frac{2\pi}{\omega} b\dot{x}^2 = \pi b x_a^2,$$

откуда

$$\dot{x}_g = \frac{\omega x_a}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

Таким образом, в теории колебаний в качестве действующего значения колебания может быть скорость, равная величине $\omega x_a/\sqrt{2}$. В выражении (6) амплитуда x_a определяется соотношением [4]

$$x_a = \frac{F_a}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\left(\dfrac{b\omega}{m}\right)^2}}. \tag{7}$$

С учетом (7)

$$\dot{x}_g = \frac{F_a}{m}\omega\left\{\sqrt{2\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2+\left(\dfrac{b\omega}{m}\right)^2\right]}\right\}^{-1}. \tag{8}$$

Выражением (8), на наш взгляд, определяется действующее значение вибрации (колебания) КС с одной степенью свободы, которое учитывает параметры КС и амплитуду вынуждающей силы.

В случае, если вынуждающая сила является полигармонической $F_\Sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ak}\sin\omega_k t$, то в силу принципа суперпозиции колебания КС будут также полигармоническим, т. е. $x_\Sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{ak}\sin(\omega_k t-\varphi_k)$. Действующее значение $x_{g\Sigma}$ будет определяться на основании равенства энергий

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^{2\pi/\omega_k} b\dot{x}_{gk}^2\,dt = \pi b\sum_{k=1}^{n}\omega_k x_{ak}^2,$$

откуда общая действующая скорость

$$\dot{x}_{g\Sigma} = \sum_{k=1}^{n}\dot{x}_{gk} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k x_{ak}^2}. \tag{9}$$

Здесь $x_{ak} = \dfrac{F_{ak}}{m\sqrt{(\omega_k^2-\omega_0^2)^2+(b\omega_k/m)^2}}$ и, окончательно,

$$\dot{x}_{g\Sigma} = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k F_{ak}^2}{\sqrt{(\omega_k^2-\omega_0^2)^2+\left(\dfrac{b\omega_k}{m}\right)^2}}}. \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) отражают действующее значение скорости КС при полигармонической вынуждающей силе. В этих формулах в качестве времени, определяющем $x_{g\sum}$, берется период первой гармоники $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Если же надо взять другой отрезок времени τ, то формула (9) будет иметь вид

$$\dot{x}_{g\Sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}\sum_{k=1}^{n}\omega_k x_{ak}^2}.$$

Заметим, что амплитуда скорости гармонического колебания равна ωx_a, т. е. в ω раз больше амплитуды перемещения x_a. Поэтому, анализируя выражения (6), можно прийти к выводу, что действующее значение перемещения колебательной системы имеет вид

$$x_g = \frac{x_a}{\sqrt{2}}. \qquad (11)$$

Формула (11) соответствует формуле действующего значения в электротехнике и квадратичному значению колебания в механике. При полигармоническом воздействии действующее значение перемещения колебательной системы на основании выражения (9) будет

$$x_{g\Sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_{ak}^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_{gk}^2}. \qquad (12)$$

Выражение (12) также отражает эквивалентность действующему значению тока в электротехнике при положении нескольких гармонических токов и квадратичному значению колебаний при полигармоническом возбуждении КС.

1. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. – Москва: Наука, 1972. – 419 с.
2. *Вибрации* в технике. В 6-ти т. / Под ред. В. В. Болотина. – Москва: Машиностроение, 1978. – Т. 1. – 352 с.
3. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
4. *Божко А. Е., Голуб Н. М.* Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 03.04.2007