8. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* Метод Фаедо–Гальоркіна для диференціально-операторних включень в банахових просторах з відображеннями w_{λ_0}-псевдомонотонного типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 1. – С. 103–126.
9. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Toscano S.* Periodic solutions for nonlinear evolution equations with W_{λ_0}-pseudomonotone maps // Нелінійні коливання. – 2006. – No 2. – С. 187–212.
10. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Yasinsky V. V.* Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with w_λ-pseudomonotone maps. – Киев: Наук. думка, 2007. – 308 с.
11. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. В 4 т. – Москва: Мир, 1977. – Т. 1. – 359 с.
12. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York, 1988. – 643 p.
13. *Clarke F. H.* Optimization and nonsmooth analysis. – Philadelphia: SIAM, 1990. – 280 p.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 23.08.2007

УДК 512.54

Я. В. Лавренюк, В. В. Некрашевич

Групи зберігаючих міру гомеоморфізмів множини Кантора

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. О. Перестюком)

We study the Bernoulli measure-preserving groups of self-homeomorphisms of spherically homogeneous trees.

1. Нагадаємо необхідні нам поняття, пов'язані з кореневими деревами та їхніми границями. Більш докладно про це можна прочитати в [1, 2]. Кореневе дерево — це дерево з виділеною вершиною, яка називається коренем дерева. Ми розглядатимемо лише локально скінченні дерева.

Вершина v дерева T лежить під вершиною w, якщо шлях, що з'єднує вершину v з коренем, містить вершину w (позначатимемо це $v \prec w$). Ми позначатимемо T_v повне піддерево дерева T, що складається з усіх вершин, що лежать нижче від v з коренем v.

Рівнем n (сферою радіусом n) називається множина V_n, що складається з усіх вершин, які лежать на відстані n від кореня. Кореневе дерево T називається сферично однорідним, якщо в кожному рівні дерева T усі вершини мають однакову валентність. Сферичний індекс сферично однорідного дерева T — це послідовність $(n_0, n_1, \ldots)$, де n_0 — валентність кореневої вершини, а $n_m + 1$ — валентність довільної вершини з рівня m. Нагадаємо, що супернатуральним числом називається формальний нескінченний добуток вигляду $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots$, де p_1, p_2, $\ldots$ — усі прості числа в природному порядку, а α_i — або ціле невід'ємне число, або символ ∞ ($i = 1, 2, \ldots$). Два супернатуральних числа $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ і $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots$ вважаються рівними, якщо $\alpha_i = \beta_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots$. Характеристикою дерева T називається супернатуральне число

$$\Omega(T) = \prod_{i=0}^{\infty} n_i.$$

Кінець кореневого дерева — це нескінченний шлях без повторень з початком у корені. Ми позначатимемо ∂T множину всіх кінців (границю) дерева T. Множина границь піддерев ∂T_v є базисом топології на ∂T. Топологічний простір ∂T є компактним і цілком незв'язним. Групу всіх гомеоморфізмів на себе простору ∂T позначатимемо $\mathrm{Homeo}\, \partial T$.

Зафіксуємо деяку нескінченну строго спадну послідовність додатних чисел $\overline{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка збігається до 0. Ми можемо ввести природну ультраметрику на ∂T, поклавши $\rho_{\overline{\lambda}}(x_1, x_2) = \lambda_n$, де n — довжина найбільшої спільної частини кінців x_1 і x_2. У результаті дістаємо компактний ультраметричний простір, який позначатимемо $(\partial T, \rho_{\overline{\lambda}})$, чи просто ∂T.

Якщо дерево T сферично однорідне, то на ∂T природно вводиться борелева ймовірнісна міра m_T (міра Бернуллі). Ця міра визначається умовою, що $m_T(\partial T_v) = 1/|V_n|$, де V_n — рівень вершини v. Міра m_T є єдиною ймовірнісною мірою на ∂T, яка інваріантна щодо дії групи ізометрій простору $(\partial T, \rho_{\overline{\lambda}})$. Множина всіх гомеоморфізмів ∂T, що зберігають міру m_T утворюють групу. Ми будемо позначати цю групу $\mathcal{M}_T$.

Метрика на групі гомеоморфізмів вводиться таким чином:

$$\overline{\rho}_{\overline{\lambda}}(g, h) = \max_{x \in \partial T} \rho_{\overline{\lambda}}(x^g, x^h)$$

для всіх g та h з $\mathrm{Homeo}\, \partial T$.

Ми можемо визначити групу $S(\partial T, n)$ тих гомеоморфізмів ∂T, які лише жорстко переставляють кулі ∂T_v ($v \in V_n(T)$). Очевидно, що $S(\partial T, n)$ збігається із симетричною групою $\mathrm{Sym}\,(V_n(T))$ і $S(\partial T, n) \leqslant S(\partial T, k)$ для $n \leqslant k$. Однорідна симетрична група $S(\partial T) < \mathrm{Homeo}\, \partial T$ визначається як об'єднання підгруп $S(\partial T, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Надалі ми розглядатимемо лише сферично однорідні дерева, у сферичних індексах яких немає одиниць.

Лема 1. *Для довільного елемента g групи $\mathcal{M}_T$ існує послідовність $\{h_n \in S(\partial T), n \in \mathbb{N}\}$, що збігається до g.*

Доведення. Побудуємо потрібну послідовність за індукцією. Спочатку виберемо h_1. Нехай V_{k_1} — якийсь рівень дерева T. Для кожної кулі ∂T_{v_i} ($v_i \in V_{k_1}$) образ $g(\partial T_{v_i})$ є диз'юнктним об'єднанням куль $\bigsqcup \partial T_{w_j}$, що відповідають вершинам деякого рівня V_{n_1}. Можна вибрати одне n_1 ($n_1 > k_1$) для всіх вершин з V_{k_1}, бо ця множина скінченна. Гомеоморфізм h_1 індукується деякою підстановкою π множини вершин V_{n_1}, для якої

$$g(\partial T_{v_i}) = \bigcup_{\{w_j | w_j \in V_{n_1}, w_j \prec v_i\}} \partial T_{\pi(w_j)}.$$

Оскільки гомеоморфізм g зберігає міру, то підстановка із зазначеною вище властивістю існує.

Тепер виберемо h_{i+1} за індукцією. Нехай h_i вже вибране, а k_i та n_i визначені. Поклавши $k_{i+1} = n_i$ для $i \geqslant 1$, ми визначимо h_{i+1} таким же чином, як у випадку h_1.

Оскільки g є гомеоморфізмом, то для кожного $\epsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-яких x_1, x_2 з $\rho(x_1, x_2) < \delta$ виконується $\rho(g(x_1), g(x_2)) < \epsilon$. Виберемо натуральне i таким чином, щоб радіус ∂T_v $(v \in V_i)$ був меншим за δ. Оскільки $k_i \geqslant i$, то для довільних $x \in \partial T$ і $j > 0$ існує $\widetilde{x} \in \partial T$ таке, що x і $\widetilde{x}$ належать одній і тій же кулі, що відповідає деякій вершині рівня $i + j$ (і, таким чином, $\rho(\widetilde{x}, x) < \delta$) та $h_{i+j}(x) = g(\widetilde{x})$. Звідси $\rho(h_{i+j}(x), g(x)) < \epsilon$. Отже, послідовність $\{h_n \in S(\partial T), n \in \mathbb{N}\}$ збігається до g.

Лема 2. *Група $\mathcal{M}_T$ є замкненою в топології, індукованій метрикою $\overline{\rho}$.*

Схема доведення. Доведемо, що для довільної кулі B і для будь-якої послідовності зберігаючих міру гомеоморфізмів $\{f_n\}$, що збігаються до f, виконується рівність $m(f(B)) = m(B)$. Оскільки $\{f_n\}$ збігається до f, то для кожного додатного ϵ, існує N таке, що для довільного $n > N$ ϵ-окіл $f(B)$ містить $f_n(B)$. Образ $f(B)$ — скінченне об'єднання куль. Тому $m(f(B)) \geqslant m(B)$. Оскільки $m(f(\partial T)) = m(\partial T)$, то $m(f(B)) = m(B)$ для довільної кулі B простору ∂T.

Оскільки множина всіх куль складає базу топології ∂T, яка індукує метрику, то гомеоморфізм f зберігає міру.

Отже, ми маємо як наслідок

Теорема 1. *Група $\mathcal{M}_T$ є замиканням групи $S(\partial T)$ у топології, індукованій метрикою $\overline{\rho}$.*

Лема 3. *Нехай $G_i < \mathcal{M}_{T_i}$ $(i = 1, 2)$ групи, що містять слабо гіллясті підгрупи і нехай гомеоморфізм $h\colon \partial T_1 \to \partial T_2$ індукує ізоморфізм G_1 на G_2. Для довільної кулі ∂T_v $(v \in V_k(T_1))$ $(k \in \mathbb{N})$ виконується рівність*

$$m_{T_2}(h(\partial T_v)) = m_{T_1}(\partial T_v).$$

Отже, гомеоморфізм h зберігає міру.

Доведення. Для m_{T_1} справджується рівність

$$m_{T_1}(\partial T_1) = m_{T_1}\left[\bigsqcup_{w \in V_k(T_1)} \partial T_w\right] = |V_k(T_1)| m_{T_1}(\partial T_v).$$

Оскільки кожен елемент G_1 зберігає міру m_{T_1} і $hgh^{-1} \in G_2$ для всіх $g \in G_1$, то $m_{T_2}(h(\partial T_u)) = m_{T_2}(h(\partial T_w))$ для довільних u, $w \in V_k(T_1)$. Тому

$$m_{T_2}(\partial T_2) = m_{T_2}(h(\partial T_1)) = m_{T_2}\left(h\left(\bigsqcup_{w \in V_k(T_1)} \partial T_w\right)\right) = m_{T_2}\left(\bigsqcup_{w \in V_k(T_2)} h(\partial T_w)\right) = |V_k(T_2)| m_{T_2}(h(\partial T_v)).$$

Таким чином, $m_2(h(\partial T_v)) = m_1(\partial T_v)$.

Теорема 2. *Якщо підгрупа G групи $\mathcal{M}_T$ містить слабо гіллясту підгрупу, то кожен автоморфізм G індукується якимось елементом з $\mathcal{M}_T$, тобто $Aut(G) \simeq N_{\mathcal{M}_T}(G)$.*

Доведення. За теоремою 2 з роботи [3] кожен автоморфізм групи G індукується елементом з $N_{\mathrm{Homeo}\,\partial T}(G)$. Але за лемою 4 цей нормалізатор збігається з нормалізатором $N_{\mathcal{M}_T}(G)$. Отже, нам потрібно довести лише, що центр G тривіальний. Врахувавши, що у довільної слабо гіллястої групи центр та централізатор у групі $\mathrm{Homeo}\,\partial T$ є тривіальними, одержимо необхідне.

Наслідок 1. *Група $\mathcal{M}_T$ — досконала, тобто вона має тривіальний центр і не має зовнішніх автоморфізмів.*

Теорема 3. *Нехай T_1 та T_2 сферично однорідні дерева. Тоді є еквівалентними такі умови:*

1) $\mathcal{M}_{T_1} \simeq \mathcal{M}_{T_2}$;

2) $S(\partial T_1) \simeq S(\partial T_2)$;

3) характеристики дерев T_1 та T_2 збігаються.

Схема доведення. Еквівалентність другого та третього пунктів є відомою [4].

(1⇒3) За теоремою 2 з роботи [3] і лемою 3 існує зберігаючий міру гомеоморфізм $h\colon \partial T_1 \to \partial T_2$. Таким чином, множини $M_1 = \{m_{T_1}(U) | U \subset \partial T_1$ є відкрито-замкненою$\}$ і $M_2 = \{m_{T_2}(U) \mid U \subset \partial T_2$ є відкрито-замкненою$\}$ збігаються. Якщо p^n є дільником характеристики T_1 для простого p, то $p^{-n} \in M_1$. Тому $p^{-n} \in M_2$. Звідки p^n є дільником характеристики T_2. Отже, характеристики дерев T_1 та T_2 збігаються.

(3⇒1) Оскільки $S(\partial T_1) \simeq S(\partial T_2)$, то за теоремою 2 з роботи [3] та лемою 3 існує зберігаючий міру гомеоморфізм $h\colon \partial T_1 \to \partial T_2$. Оскільки $\mathcal{M}_{T_1}^h \subset \mathcal{M}_{T_2}$ і $\mathcal{M}_{T_2}^{h^{-1}} \subset \mathcal{M}_{T_1}$, то $\mathcal{M}_{T_1}^h = \mathcal{M}_{T_2}$ і групи $\mathcal{M}_{T_1}$ та $\mathcal{M}_{T_2}$ ізоморфні.

З першої частини доведення останньої теореми отримаємо

Наслідок 2. *Якщо ізоморфні підгрупи G_1 та G_2 груп $\mathcal{M}_{T_1}$ та m_{T_2} відповідно містять слабо гіллясті підгрупи, то характеристики дерев T_1 та T_2 збігаються.*

1. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 2000. – **231**. – С. 134–214.
2. *Nekrashevych V.* Self-similar groups // Mathematical Surveys and Monographs. – Providence: AMS, 2005. – Vol. 117. – 231 p.
3. *Rubin M.* On the reconstruction of topological spaces from their groups of homeomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **312**, No 2. – P. 487–538.
4. *Kroshko N. V., Sushchansky V. I.* Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embeddings // Arch. Math. – 1998. – **71**. – P. 173–182.

Київський університет ім. Тараса Шевченка
Техаський A&M університет, Коледж Стейшн

Надійшло до редакції 11.10.2007