ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

7 • 2008

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 620.178.3

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко, В. Е. Корсун**

О законе распределения вероятности смеси стохастических и полигармонических колебаний

The laws for the probability density distribution of additive, multiplicative, and generalized mixtures of polyharmonic and stochastic oscillatory processes are determined.

В данной работе показано построение одномерного закона распределения вероятности аддитивной и мультипликативной смесей стационарного стохастического $\xi(t)$ и полигармонического

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \tag{1}$$

процессов. Подобная задача с аддитивной смесью решена С. Райсом [1] для нормальной помехи и моногармонического процесса. Ниже рассматривается более общий случай с несколькими гармониками. Причем будем различать две постановки задачи: первая — частоты гармоник ω_k, $k = \overline{1, N}$, несоизмеримы (их отношения — иррациональные числа), все начальные фазы φ_k, $k = \overline{1, N}$, случайны и равномерно распределены в пределах 0–2π; вторая — частоты $\omega_k = k\omega_1$, $k = \overline{1, N}$, а сдвиги фаз — $\varphi_k = k\varphi_1$ зафиксированы относительно φ_1. При этом φ_1 равномерно распределен на интервале 0–2π.

Аддитивная смесь — это $y(t) = \xi(t) + x(t)$, мультипликативная — $y(t) = \xi(t)x(t)$. Для обеих задач из-за стохастичности φ_k, $k = \overline{1, N}$, процесс (1) является стационарным эргодическим [2] и его одномерную функцию распределения $F_x(u)$ можно определить в виде [3]

$$F_x(u) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_0^r \eta[u - x(t)]\, dt,$$

где

$$x(t) \leqslant u, \qquad \eta(\cdot) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & (\cdot) \geqslant 0 \\ 0, & (\cdot) < 0 \end{array} \right\}.$$

Плотность вероятности стохастического смешанного процесса

$$y(t) = \xi(t) + x(t) \tag{2}$$

при независимых составляющих является композицией

$$P_y(\upsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_x(u) P_\xi(\upsilon - u)\, du \tag{3}$$

закона распределения процесса $\xi(t)$ и плотности распределения полигармонического процесса

$$P_x(u) = \frac{dF_x(u)}{du} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int\limits_0^r \delta[u - x(t)]\, dt, \tag{4}$$

где $\delta(\alpha) = d\eta(\alpha)/d\alpha$ — дельта-функция.

При несоизмеримых ω_k и φ_k, $k = \overline{1, N}$, гармониках (1) плотность вероятности (1) может быть описана в виде [4]

$$P_x(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2S_A}\left[1 + 2\sum\limits_{l=1}^{\infty} \cos\dfrac{\pi l u}{S_A} \prod\limits_{k=1}^{N} I_0\left(\dfrac{A_k \pi l}{S_A}\right)\right], & |u| \leqslant S_A, \\ 0, \qquad |u| > S_A, \end{cases} \tag{5}$$

где I_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $S_A = \sum\limits_{k=1}^{N} A_k$.

Для второй постановки задачи, рассматривая период $(-\varphi_1/\omega_1, T - \varphi_1/\omega_1)$ реализации процесса (1), где $T = 2\pi/\omega_1$, и вводя вместо времени безразмерную координату $\tau = t/T - - \varphi_1/(2\pi)$, можно записать выражение для плотности вероятности $P_x(u)$ в следующем виде [5, 6]:

$$P_x(u) = \begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{\infty} \dfrac{1}{|q'(\tau_l)|}, & x_{\min} \leqslant u \leqslant x_{\max}, \\ 0, & u < x_{\min},\ u > x_{\max}, \end{cases} \tag{6}$$

где τ_l, $l = 1$, L — корни на интервале (0,1) транцендентного уравнения

$$q(\tau) = A_1 \sin 2\pi\tau + \sum_{k=2}^{N} A_k \sin(2\pi k\tau + \varphi_k - k\varphi_1) = u.$$

Заметим, что поскольку τ_l отыскиваются на периоде функции $q(\tau)$, их количество будет четным, а это значит, что L будет четным.

Из (6) видно, что

$$\lim_{\Delta u\to 0} P_x(U_m^{\min} + \Delta u) = \lim_{\Delta u\to 0} P_x(U_m^{\max} - \Delta u) = \infty,$$

а величина $P_x(U_m^{\min} - \Delta u) > P_x(U_m^{\max} + \Delta u)$ является конечной при любых сколь угодно малых Δu. Нахождение каждого из значений плотностей распределения (5) и (6) обоих рассматриваемых типов квазидетерминированного полигармонического процесса $x(t)$ связано с трудоемкими вычислениями, которые могут быть частично устранены преобразованием (3) к виду, удобному для численных расчетов. В связи с этим рассмотрим случай с гауссовской шумовой составляющей $\xi(t)$, при которой (4) приобретает вид

$$P_y(\upsilon) = \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_x(u)\exp\left[-\frac{(\upsilon-u)^2}{2\sigma_\xi}\right]du. \tag{7}$$

Разлагая экспоненциальную функцию в ряд

$$\exp(-\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^n}{n!} \tag{8}$$

и интегрируя затем почленно, получим

$$P_y(\upsilon) = \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2\sigma_\xi^2)^n n!}\sum_{s=0}^{2n}(-1)^s C_{2n}^s\upsilon^{2n-s}\mu_s^x, \tag{9}$$

где C_{2n}^s — биноминальные коэффициенты; μ_s^x — нормированные центральные моменты процесса $x(t)$, вводимые через его плотность распределения $\mu_s^x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U^s P_x(u)\,du, s = 2, 3, 4, \ldots,$ по аналогии со стохастическими процессами.

Так как $x(t)$ является стационарным эргодическим процессом для двух задач, то моментные характеристики можно определить как усредненные по времени в виде

$$\mu_s^x = \frac{1}{r}\int\limits_0^r [x(t)]^s dt, \tag{10}$$

где $r \to \infty$ при несоизмеримых ω_k с ω_1 и $r = T = 2\pi/\omega_1$ при $\omega_k = k\omega_1$. Подставляя (10) в (9), заменяя сумму интегралов интегралом от суммы и переходя обратно к экспоненциальной функции с помощью разложения (8), получим

$$P_y(\upsilon) = \frac{1}{r\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^r \exp\left\{-\frac{[\upsilon - x(t)]^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}dt. \tag{11}$$

Таким образом, выражение (7) преобразовано к (11), где подынтегральная функция единым образом задана аналитически для $P_x(u)P_\xi(\upsilon - u)$. Отметим, что аналогичное решение можно получить и в общем виде, не конкретизируя закон распределения $P_\xi(u)$ стохастической составляющей $\xi(t)$. Для этого представим плотность вероятности $P_\xi(u)$ в виде разложения в ряд Маклорена

$$P_\xi(u) = \sum_{n=0}^{\infty}P_\xi^{(n)}(0)\frac{U^n}{n!}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (3), получим

$$P_y(\upsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_x(u)\sum_{n=0}^{\infty}P_\xi^{(n)}(0)\sum_{s=0}^{2n}(-1)^s C_{2n}^s\upsilon^{2n-s}u^s du.$$

Интегрируя почленно это выражение и используя свойство эргодичности полигармонического процесса, получаем

$$P_y(\upsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\xi}^{(n)}(0) \sum_{s=0}^{2n} (-1)^s C_{2n}^s \upsilon^{2n-s} \frac{1}{r} \int_0^r x^s(t)\, dt,$$

где $r \to \infty$ или $r = 2\pi/\omega_1$.

Воспользовавшись снова выражением (12), получим плотность вероятности смешанного процесса

$$P_y(\upsilon) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}[\upsilon - x(t)]\, dt \tag{13}$$

при несоизмеримых ω_k, $k = \overline{1, N}$, и стохастических φ_k составляющей $x(t)$ и

$$P_y(\upsilon) = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_1} P_{\xi}[\upsilon - x(t)]\, dt \tag{14}$$

при $\omega_k = k\omega_1$ и фиксированных сдвигов фаз $\varphi_k - k\phi_1$ высших гармоник $x(t)$ относительно его первой гармоники. При нормальном законе распределения из выражений (13), (14) следует выражение (11). Если же $x(t)$ содержит одну гармонику, то из (14) получается как частный случай формула Райса для распределения смеси гармоники и гауссовского шума [1].

Так как плотность вероятности $P_y(\upsilon) = dF_y(\upsilon)/d\upsilon$, то с учетом (16)

$$F_y(\upsilon) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_0^r F_{\xi}[\upsilon - x(t)]\, dt$$

и с учетом (17)

$$F_y(\upsilon) = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_1} F_{\xi}[\upsilon - x(t)]\, dt.$$

Из полученных результатов следует, что плотность распределения вероятности процесса (2) в случае $x(t)$ с несоизмеримыми частотами обладает свойствами симметрии и стремится к нормальной с увеличением числа гармоник N и дисперсии σ_{ξ}^2 функции $\xi(t)$. Плотность распределения вероятности (2) с $x(t)$ с кратными частотами несимметрична и в меньшей мере стремится к нормальной с увеличением σ_{ξ}^2 составляющей $\xi(t)$.

Далее перейдем к рассмотрению мультипликативной смеси

$$y(t) = \xi(t)x(t). \tag{15}$$

Из работы [7] известно, что если стохастические величины α и β независимы и им соответствуют плотности вероятности $P_1(\alpha)$ и $P_2(\beta)$, то произведению $\gamma = \alpha\beta$ соответствует плотность вероятности $P_3(\gamma)$, определяемая выражением

$$P_3(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(\alpha) P_2\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) \frac{1}{|\alpha|} d\alpha. \tag{16}$$

В соответствии с (16) одномерное распределение вероятности процесса (15) при гауссовской $\xi(t)$ запишем в виде

$$P_y(\upsilon) = \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_x(u) \exp\left\{-\frac{\upsilon^2}{2\sigma_\xi^2 u^2}\right\} \frac{1}{|u|} du. \tag{17}$$

Далее, подставляя в (17) выражение для $P_x(u)$ в виде (15), получим

$$P_y(\upsilon) = \frac{1}{r\sigma_\xi\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{r} \delta[u - x(t)] \exp\left\{-\frac{\upsilon^2}{2\sigma_\xi^2 u^2}\right\} \frac{1}{|u|} du dt.$$

Изменяя очередность интегрирования и используя фильтрующее свойство δ-функции, получаем

$$P_y(\upsilon) = \frac{1}{r\sigma_\xi\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{r} \frac{1}{|x(t)|} \exp\left\{-\frac{\upsilon^2}{2\sigma_\xi^2 x^2(t)}\right\} dt, \tag{18}$$

где $r = T = 2\pi/\omega_1$ — для $x(t)$ с кратными частотами и $r \to \infty$ — для $x(t)$ с несоизмеримыми частотами.

На основании проведенного исследования плотность вероятности обобщенной модели стохастического процесса [8]

$$y(t) = x_1(t)\xi(t) + x_2(t),$$

где $\xi(t)$ — стационарный нормальный стохастический процесс, $x_1(t)$, $x_2(t)$ описываются выражением (1), включающим в себя одновременно аддитивную и мультипликативную составляющие, может быть представлена в виде

$$P_y(\upsilon) = \frac{1}{r\sigma_\xi\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{r} \frac{1}{|x_1(t)|} \exp\left\{-\frac{[\upsilon - x_2(t)]^2}{2\sigma_\xi^2 x_1^2(t)}\right\} dt. \tag{19}$$

Таким образом, с помощью выражений (14), (18), (19) могут быть численно оценены плотности распределения вероятностей аддитивной, мультипликативной и обобщенной смесей колебательного процесса $y(t)$.

1. *Райс С.* Теория флуктуационных шумов // Теория передачи электрических сигналов при наличии помех / Под ред. А. Н. Железнова. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1953. – 288 с.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – Москва: Наука, 1973. – 720 с.
3. *Коловский М. З.* Нелинейная теория виброзащитных систем. – Москва: Наука, 1966. – 317 с.
4. *Левин Б. Р., Шварц В.* Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. – Москва: Радио и связь, 1985. – 312 с.
5. *Божко А. Е., Штейнвольф А. Л.* Воспроизведение полигармонических вибраций при стендовых испытаниях. – Киев: Наук. думка, 1981. – 167 с.
6. *Штейнвольф А. Л.* Моделирование случайных вибраций полигармоническими колебаниями // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 6. – С. 52–57.
7. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. – Москва: Наука, 1969. – 576 с.

8. *Гусев А. В., Светлицкий В. А.* Расчет конструкций при случайных воздействиях. – Москва: Машиностроение, 1984. – 240 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 21.05.2007

УДК 519.85

Т. Е. Романова, А. В. Кривуля, М. В. Злотник

Трансляционное прямоугольное покрытие

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)

The article considers a covering problem of a multiconnected compact polygonal region by a finite family of rectangles. The Γ-function technique is used for an analytical description of the relationship between the region and the family of rectangles. A covering criterion is formalized. A mathematical model of the problem is discussed. A solution strategy is developed. The solution strategy is provided with an example.

Рассматривается задача покрытия [1] в следующей постановке. Пусть задана компактная многоугольная область $\Omega(v) \subset R^2$ и семейство $\Lambda = \{P_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ прямоугольников $P_i = \{(x, y) \in R^2,\ -a_i \leqslant x \leqslant a_i,\ -b_i \leqslant y \leqslant b_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где R^2 — двумерное арифметическое евклидово пространство.

Полагаем, что $v = \mathrm{const}$, а расположение P_i в пространстве R^2 определяется вектором $u_i = (x_i, y_i)$. Семейство транслированных прямоугольников $P_i(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, обозначим $\Lambda(u)$, где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in R^{2n}$.

Семейство $\Lambda(u)$ является покрытием области Ω [2], если существует вектор $u \in R^{2n}$, такой, что

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i). \tag{1}$$

Задача. Определить — существует ли вектор $u \in R^{2n}$ такой, что выполняется условие (1).

Пусть $u^0 \in R^{2n}$ удовлетворяет (1). Тогда справедливо

$$\Omega \bigcap \operatorname{int} H(u^0) = \varnothing, \tag{2}$$

где $H(u^0) = R^2 \backslash \operatorname{int} P(u^0)$, $P(u^0) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i(u_i^0)$, $\operatorname{int} H(u^0)$ — внутренность множества $H(u^0)$ [3].

Соотношение (2) может быть описано неравенством

$$\Phi(w, v) \geqslant 0, \tag{3}$$