ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

7 • 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 514.774.4

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Борисенко, Е. А. Олин**

Связь между объемом и площадью шаров в геометрии Гильберта

We show that the spheres in the Hilbert geometry have the same volume growth rate as those in the Lobachevsky space. We give the asymptotic estimates for the ratio of the volume of a metric ball to the area of a metric sphere in the Hilbert geometry. The derived estimates agree with the well-known facts for the Lobachevsky space.

Геометрии Гильберта являются обобщением модели Кели–Клейна пространства Лобачевского. В ней эллипсоид, играющий роль абсолюта, заменяется произвольной выпуклой гиперповерхностью. Геометрии Гильберта являются примером полных, проективно плоских симметричных финслеровых метрик постоянной отрицательной флаговой кривизны -1.

Пусть U — ограниченное открытое выпуклое множество с границей класса C^∞ с положительными нормальными кривизнами в $\mathbb{R}^n$, снабженным обычной евклидовой нормой $\|\cdot\|$. Для двух различных точек p и q из U пусть p_1 и q_1 будут соответственно точками пересечения лучей $p+\mathbb{R}_-(q-p)$ и $p+\mathbb{R}_+(q-p)$ с ∂U. Тогда введем следующую метрику:

$$d_U(p,q)=\frac{1}{2}\ln\frac{\|q-q_1\|}{\|p-p_1\|}\times\frac{\|p-p_1\|}{\|q-q_1\|},$$
$$d_U(p,p)=0.$$

Метрическое пространство (U,d_U) является полным некомпактным геодезическим метрическим пространством с $\mathbb{R}^n$-топологией, в котором геодезическими являются афинные отрезки [1, 2].

Функция расстояния индуцирует финслерову метрику F_U на U следующего вида. Для точки $p\in U$ и касательного вектора $v\in T_pU=\mathbb{R}^n$

$$F_U(p,v)=\frac{1}{2}\|v\|\left(\frac{1}{\|p-p_-\|}+\frac{1}{\|p-p_+\|}\right).$$

Здесь p_- и p_+ — точки пересечения соответственно лучей $p+\mathbb{R}_-v$ и $p+\mathbb{R}_+v$ с ∂U.

Тогда

$$d_U(p,q) = \inf_{c\colon I\to C\colon\, c(0)=p,\ c(1)=q,\ c\in C^1(I)} \int\limits_I F_U(c(t),\dot c(t))\,dt.$$

Если $U = B^n_r$, то метрика $F_{B^n_r}$ превращается в метрику Лобачевского в интерпретации Кели–Клейна и имеет вид

$$F_{B^n_r}(p,v) = \sqrt{\frac{\|v\|^2}{r-\|p\|^2} + \frac{\langle v,p\rangle^2}{(r^2-\|p\|^2)^2}}.$$

В [2] доказано, что метрика Гильберта "стремится" к римановой метрике в следующем смысле.

Теорема [2]. *Пусть $C \in \mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое строго выпуклое множество с границей класса C^3. Для каждой точки $p \in C$ обозначим через $\delta(p) > 0$ евклидово расстояние от p до ∂C. Тогда найдется семейство $(\vec{l}_p)_{p\in C}$ линейных преобразований $\mathbb{R}^n$ такое, что*

$$\lim_{\delta(p)\to 0} \frac{F_C(p,v)}{\|\vec{l}_p(v)\|} = 1$$

равномерно по $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Это значит что единичная сфера касательного пространства метрики Гильберта стремится в C^0 топологии к эллипсоиду, когда точка стремится к границе множества.

Интересно получить другие асимптотические свойства метрик Гильберта.

В работе [1] было доказано, что шары в $(n+1)$-мерной геометрии Гильберта имеют такую же экспоненциальную скорость роста объема (энтропию), как шары в $\mathbb{H}^{n+1}$, а именно n. Мы доказали аналогичный результат для сфер в геометрии Гильберта.

Теорема 1. *Рассмотрим $(n+1)$-мерную геометрию Гильберта, построенную на ограниченном открытом строго выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, причем граница U является C^3-гладкой гиперповерхностью с положительными нормальными кривизнами. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(\mathbf{Vol}(S^n_t))}{t} = n.$$

Известно [3–5], что в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^{n+1}$ кривизны -1 для семейства метрических шаров $\{B^{n+1}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ выполняется следующее равенство:

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\mathbf{Vol}(B^{n+1}_\rho)}{\mathbf{Vol}(S^n_\rho)} = \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Оценка этого отношения в более общем случае для λ- и h-выпуклых гиперповерхностей в пространствах Адамара была дана в работах [3, 4]. Мы рассматривали такое отношение для семейства $\{B^{n+1}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ в геометрии Гильберта.

Теорема 2. *Рассмотрим $(n+1)$-мерную геометрию Гильберта, построенную на ограниченном открытом строго выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, причем граница U является C^3-гладкой гиперповерхностью с положительными нормальными кривизнами. Зафиксируем точку $o \in U$, будем рассматривать эту точку как начало координат и центр всех* *шаров. Обозначим через $\omega(u)\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}_+$ радиальную функцию для ∂U, т. е. отображение $\omega(u)u$, $u \in \mathbb{S}^n$ является параметризацией ∂U, и через $\iota\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ — отображение такое, что $\iota(p) = u_p/\|u_p\|$, u_p — радиус-вектор точки p.*

Обозначим через K и k максимальную и минимальную нормальную кривизну ∂U, $c = \max\limits_{u\in\mathbb{S}^n}(\omega(u)/\omega(-u))$, $\omega_0 = \min\limits_{u\in\mathbb{S}^n}\omega(u)$, $\omega_1 = \max\limits_{u\in\mathbb{S}^n}\omega(u)$, du — элемент площади сферы $\mathbb{S}^n$, dp — элемент площади ∂U. Тогда

$$\lim_{\rho\to\infty}\sup\frac{\mathbf{Vol}(B_\rho^{n+1})}{\mathbf{Vol}(S_\rho^n)} \leqslant \frac{1}{n}c^{n/2}\left(\frac{K}{k}\right)^{n/2}\frac{1}{(k\omega_0)^{n/2+1}}\frac{\int\limits_{\mathbb{S}^n}\omega(u)^{n/2}du}{\int\limits_{\partial U}\omega(\iota(p))^{-n/2}dp},$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\inf\frac{\mathbf{Vol}(B_\rho^{n+1})}{\mathbf{Vol}(S_\rho^n)} \geqslant \frac{1}{n}\frac{1}{c^{n/2}}\left(\frac{k}{K}\right)^{n/2}(k\omega_0)^{n/2}\frac{\int\limits_{\mathbb{S}^n}\omega(u)^{n/2}du}{\int\limits_{\partial U}\omega(\iota(p))^{-n/2}dp},$$

или в более простом виде

$$\lim_{\rho\to\infty}\sup\frac{\mathbf{Vol}(B_\rho^{n+1})}{\mathbf{Vol}(S_\rho^n)} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{K}{k}\right)^{n/2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^{n+1}\left(\frac{\omega_1}{k}\right)^{n/2}\frac{1}{k\omega_1}\frac{\mathbf{Vol}_E(\mathbb{S}^n)}{\mathbf{Vol}_E(\partial U)}, \tag{2}$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\inf\frac{\mathbf{Vol}(B_\rho^{n+1})}{\mathbf{Vol}(S_\rho^n)} \geqslant \frac{1}{n}\left(\frac{k}{K}\right)^{n/2}\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^{n/2}\omega_0^n(k\omega_0)^{n/2}\frac{\mathbf{Vol}_E(\mathbb{S}^n)}{\mathbf{Vol}_E(\partial U)}. \tag{3}$$

Если U симметрично относительно точки o, то

$$\lim_{\rho\to\infty}\sup\frac{\mathbf{Vol}(B_\rho^{n+1})}{\mathbf{Vol}(S_\rho^n)} \leqslant \frac{1}{n}c^{n/2}\left(\frac{K}{k}\right)^{n/2}\frac{\omega_1^n}{(k\omega_0)^{n/2+1}}\frac{\mathbf{Vol}_E(\mathbb{S}^n)}{\mathbf{Vol}_E(\partial U)},$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\inf\frac{\mathbf{Vol}(B_\rho^{n+1})}{\mathbf{Vol}(S_\rho^n)} \geqslant \frac{1}{n}\frac{1}{c^{n/2}}\left(\frac{k}{K}\right)^{n/2}(k\omega_0)^{n/2}\omega_0^n\frac{\mathbf{Vol}_E(\mathbb{S}^n)}{\mathbf{Vol}_E(\partial U)}.$$

П р и м е р. Если $U = \mathbb{B}_\rho^{n+1}$, то мы получаем модель Клейна геометрии Лобачевского. Здесь мы имеем

$$\omega(u) = \frac{1}{k} = \frac{1}{K} = \omega_0 = \rho, \qquad c = 1, \qquad \underset{E}{\mathbf{Vol}}(\partial U) = \rho^n\,\underset{E}{\mathbf{Vol}}(\mathbb{S}^n).$$

Используя оценки (2), (3), получаем равенство (1).

1. *Colbois B., Verovic P.* Rigidity of Hilbert metrics // Bull. Austral. Math. Soc. – 2002. – **65**. – P. 23–34.
2. *Colbois B., Verovic P.* Hilbert geometries for strictly convex domains // Geometriae Dedicata. – 2004. – **105**. – P. 29–42.
3. *Борисенко А. А.* Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. – Москва: Экзамен, 2003. – 672 с.
4. *Borisenko A. A., Gallego E., Reventos A.* Relation between area and volume for convex sets in Hadamard manifolds // Different. Geom. and Its Appl. – 2001. – **14**. – P. 267–280.
5. *Borisenko A. A., Olin E. A.* Some comparison theorems in Finsler–Hadamard manifolds // J. Math. Phys., Anal., Geometry. – 2007. – **3**, No 3. – P. 298–312.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 08.11.2007