

Л. В. Назаренко

Деформативные свойства и долговременная повреждаемость композитов с ортотропными включениями при дробно-степенной функции длительной микропрочности*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л. П. Хорошунюм)**The article presents a generalization of the theory of long-term damageability to the case of discrete fibrous composites with orthotropic inclusions.*

На основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред теория длительной повреждаемости однородного материала построена Л. П. Хорошунюм как для однородного материала [1], так и для зернистых и дискретно-волоконистых композитов. В настоящей работе теория длительной повреждаемости обобщается на случай композитного материала с эллипсоидальными ортотропными включениями. Предполагается, что матрица является изотропной, в то время как включения обладают ортотропной симметрией упругих свойств.

Рассматривается случай, когда процесс повреждаемости происходит в матрице композита. В основу структурной теории длительной повреждаемости композитных материалов положены уравнения механики микронеоднородных сред стохастической структуры. Процесс повреждаемости матрицы моделируется разрушением рассеянных микрообъемов материала и образованием на их месте стохастически расположенных микропор [2]. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, описываемой дробно-степенной функцией зависимости времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Губера–Мизеса [3]. Предел кратковременной микропрочности принимается случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается распределением Вейбулла [2]. Эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние композита стохастической структуры определяются на основе стохастических уравнений упругости [4].

Построен алгоритм вычисления зависимостей микроповреждаемости матрицы дискретно-волоконистого композита от времени, макронапряжений или макродеформаций от времени, а также приведены соответствующие кривые в случае дробно-степенной функции долговечности.

1. Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную случайно расположенными однонаправленными дискретными волокнами. Предполагается, что матрица изотропная, а включения ортотропные, причем в процессе нагружения в матрице возникают микроразрушения, которые моделируются случайно расположенными пустыми микропорами квазисферической формы. Макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформации $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ композита связаны соотношениями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (i, j, k, l = 1, 2). \quad (1)$$

Здесь λ_{ijkl}^* — тензор эффективных упругих модулей, который является функцией модулей упругости поврежденных компонентов $\lambda_{ijkl}^{[1]}$, $\lambda_{ijkl}^{[2]}$, объемного содержания включений c_1 в матрице и параметров формы включений \bar{s}_2 , \bar{s}_3 [4], т. е.

$$\lambda_{ijkl}^* = \lambda_{ijkl}^*(\lambda_{ijkl}^{[1]}, \lambda_{ijkl}^{[2]}, c_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3), \quad \bar{s}_2 = \frac{s_2}{s_1}, \quad \bar{s}_3 = \frac{s_3}{s_1}, \quad (2)$$

где s_1 , s_2 , s_3 — размеры полуосей эллипсоидальных включений в направлении координатных осей соответственно.

Тензоры модулей упругости поврежденных компонентов $\lambda_{ijkl}^{[1]}$, $\lambda_{ijkl}^{[2]}$ определяются [5] через тензоры модулей упругости скелетов компонентов λ_{ijkl}^1 , λ_{ijkl}^2 и их пористости p_1 , p_2 , характеризующие поврежденность, т. е.

$$\lambda_{ijkl}^{[1]} = \lambda_{ijkl}^{[1]}(\lambda_{ijkl}^1, p_1), \quad \lambda_{ijkl}^{[2]} = \lambda_{ijkl}^{[2]}(\lambda_{ijkl}^2, p_2). \quad (3)$$

Если задан тензор макродеформаций $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ или макронапряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$, то на основе зависимостей (1) и соотношений

$$\langle \sigma_{ij}^r \rangle = \lambda_{ijkl}^{[r]} \langle \varepsilon_{kl}^r \rangle \quad (r = 1, 2) \quad (4)$$

можно определить средние напряжения и средние деформации поврежденного r -компонента $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$, $\langle \varepsilon_{kl}^r \rangle$ как функции макродеформаций или макронапряжений [4]

$$\langle \sigma_{ij}^r \rangle = f_{ij}^1(\langle \varepsilon_{kl} \rangle), \quad \langle \varepsilon_{ij}^r \rangle = f_{ij}^2(\langle \varepsilon_{kl} \rangle), \quad \langle \sigma_{ij}^r \rangle = f_{ij}^3(\langle \sigma_{kl} \rangle), \quad \langle \varepsilon_{ij}^r \rangle = f_{ij}^4(\langle \sigma_{kl} \rangle). \quad (5)$$

При этом средние по скелету r -компонента напряжения $\bar{\sigma}_{ij}^r$ связаны со средними напряжениями $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$ поврежденного r -компонента зависимостями

$$\bar{\sigma}_{ij}^r = \frac{1}{1 - p_r} \langle \sigma_{ij}^r \rangle \quad (r = 1, 2). \quad (6)$$

Для случая, когда процесс накопления повреждений происходит в матрице, примем критерий кратковременного разрушения в микрообъеме неповрежденной части материала матрицы в форме Губера–Мизеса [3]

$$I_{\bar{\sigma}}^2 = k_2, \quad I_{\bar{\sigma}}^2 = (\bar{\sigma}_{ij}^{2'} \bar{\sigma}_{ij}^{2'})^{1/2}, \quad (7)$$

где $\bar{\sigma}_{ij}^{2'}$ — девиатор средних по неповрежденной части материала матрицы касательных напряжений; k_2 — предельное значение инварианта $I_{\bar{\sigma}}^2$, являющееся случайной функцией координат.

Если инвариант $I_{\bar{\sigma}}^2$ для некоторого микрообъема материала матрицы не достигает соответствующего предельного значения k_2 , то, согласно критерию длительной прочности, разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ_k^2 , длительность которого зависит от степени близости $I_{\bar{\sigma}}^2$ к предельному значению k_2 . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k^2 = \varphi(I_{\bar{\sigma}}^2, k_2), \quad (8)$$

причем $\varphi(k_2, k_2) = 0$, $\varphi(0, k_2) = \infty$ согласно (7).

Одноточечную функцию распределения $F(k_2)$ параметра k_2 можно описывать на полу-бесконечном интервале распределением Вейбулла:

$$F(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_0, \\ 1 - \exp(-m_2(k_2 - k_0)^{\alpha_2}), & k_2 \geq k_0, \end{cases} \quad (9)$$

где k_0 — минимальная величина предельного значения k_2 , с которого начинается разрушение в некоторых микрообъемах материала матрицы m_2 ; α_2 — постоянные, характеризующие разброс микропрочности в материале.

Примем, что случайное поле предела микропрочности k_2 является статистически однородным, что характерно для реальных материалов, а размеры единичных микроразрушений и расстояний между ними пренебрежимо малы по сравнению с размерами рассматриваемого макрообъема материала. Тогда имеет место свойство эргодичности, согласно которому функция распределения $F(k_2)$ определяет относительное содержание неразрушенной части материала матрицы, где предел микропрочности меньше соответствующего значения k_2 . Поэтому при ненулевых напряжениях $\bar{\sigma}_{ij}^2$ функция $F(I_\sigma^2)$ определяет, согласно (7), (9), относительное содержание мгновенно разрушенных микрообъемов материала матрицы. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, принимая начальную пористость матрицы равной p_0 , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости при кратковременной повреждаемости [2]:

$$p_2 = p_0 + (1 - p_0)F(I_\sigma^2). \quad (10)$$

Если напряжения в матрице $\bar{\sigma}_{jk}^2$ действуют в течение некоторого времени t , то, согласно критерию длительной прочности (8), за это время разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_2 , для которых имеет место неравенство

$$t \geq \tau_k^2 = \varphi(I_\sigma^2, k_2), \quad (11)$$

где инвариант I_σ^2 определяется выражениями (7).

Время τ_k^2 хрупкого разрушения для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение, начиная только с некоторого значения $I_\sigma^2 > 0$. В этом случае функцию долговечности $\varphi(I_\sigma^2, k_2)$ можно представить, например, дробно-степенной зависимостью [1]:

$$\varphi(I_\sigma^2, k_2) = \tau_{02} \left(\frac{k_2 - I_\sigma^2}{I_\sigma^2 - \gamma_2 k_2} \right)^{n_2}, \quad (\gamma_2 k_2 \leq I_\sigma^2 \leq k_2, \gamma_2 < 1). \quad (12)$$

Здесь τ_{02} — некоторое характерное время, показатель n_2 и коэффициент γ_2 определяются из аппроксимации экспериментальных кривых долговечности материала.

Подставляя (12) в (11), приходим к неравенству

$$k_2 \leq I_\sigma^2 \frac{1 + \bar{t}_2^{1/n_2}}{1 + \gamma_2 \bar{t}_2^{1/n_2}} \quad \left(\bar{t}_2 = \frac{t}{\tau_{02}} \right). \quad (13)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F(k_2)$, приходим к выводу, что функция $F[I_\sigma^2 \psi(\bar{t}_2)]$, где

$$\psi(\bar{t}_2) = \frac{1 + \bar{t}_2^{1/n_2}}{1 + \gamma_2 \bar{t}_2^{1/n_2}}, \quad (14)$$

определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала матрицы в момент времени \bar{t}_2 . Тогда с учетом (6) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости при длительной повреждаемости можно представить в виде

$$p_2 = p_0 + (1 - p_0)F \left[\frac{I_{\langle \sigma \rangle}^2}{1 - p_2} \psi(\bar{t}_2) \right], \quad (15)$$

где пористость p_2 является функцией безразмерного времени \bar{t}_2 , а инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^2$ определяется выражением (6) и является функцией макродеформаций или макронапряжений, согласно (4).

Уравнения баланса пористости (15) с учетом (6), (7), (14) в начальный момент $\bar{t}_2 = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала. С ростом времени уравнения (15), (7), (14) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной поврежденности, развивающейся во времени.

2. На основе соотношений (2), (3), (7), (14), (15) можно определить объемное содержание микроповреждений дискретно-волоконистого композита с ортотропными включениями в матрице и напряженно-деформированное состояние для функции $\psi(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (14), как при заданных макронапряжениях $\langle \sigma_{jk} \rangle$, так и при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$. В качестве включений и матрицы взяты соответственно топаз и эпоксидная смола с характеристиками неповрежденной части:

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^1 &= 287 \text{ ГПа}, & \lambda_{22}^1 &= 365 \text{ ГПа}, & \lambda_{33}^1 &= 300 \text{ ГПа}, \\ \lambda_{23}^1 &= 90 \text{ ГПа}, & \lambda_{13}^1 &= 85 \text{ ГПа}, & \lambda_{12}^1 &= 128 \text{ ГПа}, \\ \lambda_{44}^1 &= 110 \text{ ГПа}, & \lambda_{55}^1 &= 135 \text{ ГПа}, & \lambda_{66}^1 &= 133 \text{ ГПа}, \\ E_2 &= 3 \text{ ГПа}, & \nu_2 &= 0,35, \end{aligned} \quad (16)$$

при объемной концентрации включений, начальном содержании пор в матрице и форме включений:

$$c_1 = 0,25; 0,5; 0,75, \quad p_0 = 0; \quad \bar{s}_2 = 1, \quad \bar{s}_3 = 3, \quad (17)$$

а также при

$$k_{02} = 0,01 \text{ ГПа}; \quad m_2 = 1000; \quad \alpha_2 = 2; \quad \gamma_2 = 0,5; \quad n_2 = 1. \quad (18)$$

На рис. 1 изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 для объемного содержания включений $c_1 = 0,25$ при различных значениях макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$, на рис. 2 — кривые зависимостей макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ от времени \bar{t}_2 для объемных содержаний включений $c_1 = 0,25$ при различных значениях макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$. Как видим, при $c_1 = 0,25$ для значений $\langle \sigma_{11} \rangle = 0,016, 0,017, 0,018, 0,019, 0,020$ ГПа рост макродеформаций и накопление повреждений во времени имеет горизонтальную асимптоту, т. е. его характер аналогичный экспериментальным кривым для полимеров [6]. В случае же, когда макронапряжения превосходят эти значения, для некоторых значений времени t_2 макродеформации и поврежденность матрицы достигают критической величины, являющейся началом разрушения материала.

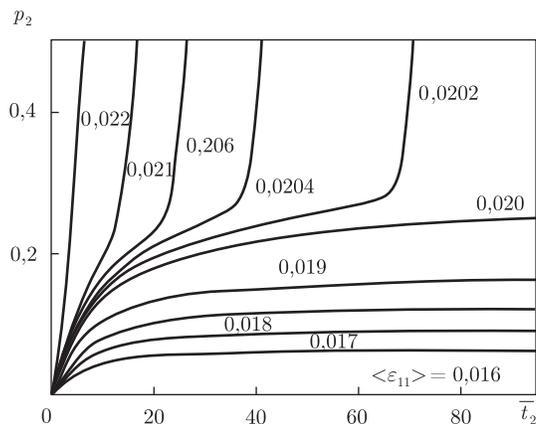


Рис. 1. Зависимость пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 при различных значениях макронапряжения

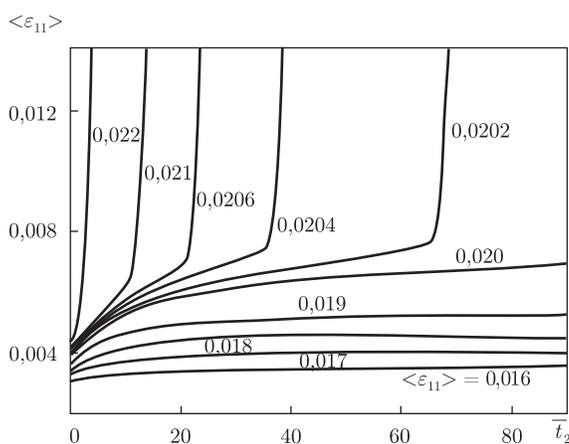


Рис. 2. Зависимость макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ от времени \bar{t}_2 при различных значениях макронапряжения

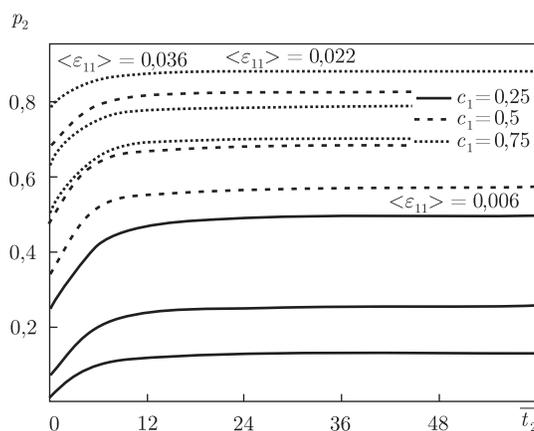


Рис. 3. Зависимость пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 при различных значениях макродеформации

На рис. 3 приведены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 при значениях макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0,006, 0,022, 0,036$ и различных значениях объемного содержания включений c_1 . На графиках сплошной линией показаны кривые при объемном

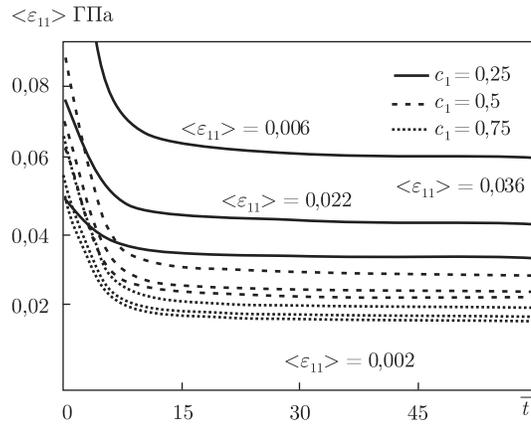


Рис. 4. Зависимость макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ от времени \bar{t}_2 при различных значениях макродеформации

содержании включений $c_1 = 0,25$, штриховой линией — при $c_1 = 0,5$, пунктирной — при $c_1 = 0,75$. Такие же обозначения приняты и на рис. 4. Графики показывают, что с увеличением макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для всех объемных содержаний включений и произвольного значения времени \bar{t}_2 микроповрежденность p_2 увеличивается. Здесь наблюдается рост поврежденности со временем, в то время как в экспериментах с полимерами [6] при фиксированной деформации поврежденность заметным образом не изменяется. Такое расхождение можно объяснить как релаксацией напряжений в полимерах, обусловленной ползучестью, которая здесь не учитывается, так и приближенностью рассматриваемой модели повреждаемости в конечновременной форме.

Рис. 4 иллюстрирует зависимости макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ от времени \bar{t}_2 при значениях макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0,006, 0,022, 0,036$ и различных значениях объемного содержания включений c_1 . Как видим, при всех значениях объемного содержания включений кривые являются нисходящими.

1. Khoroshun L. P. Principles of the micromechanics of material damage. 2. Long-term damage // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No 2. – P. 127–135.
2. Khoroshun L. P. Micromechanics of short-term thermal microdamageability // Ibid. – 2001. – **37**, No 9. – P. 1158–1165.
3. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 312 с.
4. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шижула Е. Н., Назаренко Л. В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12-ти т. Т. 3).
5. Назаренко Л. В. Thermoelastic properties of orthotropic porous materials // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No 2. – P. 114–122.
6. Тамуж В. П., Куксенко В. С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 15.01.2007