Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2008

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 517.9

В. В. Семенов

Типовість розв'язності деяких задач оптимального керування

(Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком)

Let E be a real Banach space, X a nonempty weak compact subset of E, B a closed convex subset of E such that $0 \in intB$, and $f\colon X \to \mathbb{R}$ be a bounded from above weak upper semicontinuous functional. It is proved that the set of all $y \in E$, for which the problem $f(x)+\mu_B(x-y) \to \sup\limits_{x\in X}$, where μ_B is the Minkowski functional of B, has a solution, contains an G_δ-set dense in E. This result is used for proving the generic solvability optimal control problems for linear systems.

Нехай (X,ρ) — повний метричний простір і $x \in X$. Властивість $P(x)$ називаємо типовою, якщо множина $A \subseteq X$, де вона виконується, містить зліченний перетин відкритих скрізь щільних підмножин.

З теореми Бера про категорію випливає, що у повному метричному просторі довільна множина, що містить зліченний перетин відкритих скрізь щільних підмножин, є скрізь щільною. Такі множини часто називають масивними. Структура масивних множин багатша, ніж просто скрізь щільних підмножин. Наприклад, дві скрізь щільні множини можуть не перетинатися, тоді як перетин зліченної кількості масивних множин завжди непорожній, більше того, масивний. Цим і пояснюється назва "типова властивість".

Нехай X — обмежена підмножина банахова простору $(E,\|\cdot\|_E)$. Однією з класичних задач максимізації є пошук найвіддаленіших точок у множині X. Точніше, для $y \in E$ слід знайти точку $\overline{x} \in X$ таку, що

$$\|y-\overline{x}\|_E = \sup_{x\in X}\|y-x\|_E.$$

Розглянемо множину точок $y \in E$, для яких існує найвіддаленіша в X точка:

$$E(X) = \{y \in E\colon \exists\, \overline{x} \in X \|y-\overline{x}\|_E = \sup_{x\in X}\|y-x\|_E\}.$$

У роботі [1] М. Едельштейн довів, що якщо X — непорожня замкнена й обмежена підмножина рівномірно опуклого банахова простору E, то множина $E(X)$ щільна в E.

Е. Асплунд [2] розширив цей результат, показавши, що якщо X — непорожня замкнена й обмежена підмножина рефлексивного локально рівномірно опуклого банахова простору E, то множина $E(X)$ містить щільну в E підмножину типу G_δ. Нарешті, К.-С. Лау у роботі [3] отримав подібний результат для слабко компактної підмножини довільного банахова простору. У [4] Р. Девіль та В. Зізлер показали, що результат К.-С. Лау не можна поширити на $\sigma(E^*, E)$-компактні підмножини спряженого банахова простору. Наприклад, $\forall\,\alpha > 1$ — множина

$$X_\alpha = \left\{ x = (x_n) \in l_1\colon\ \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} |x_n|^\alpha \leqslant 1 \right\} \subseteq l_1 = (c_0)^*$$

опукла та компактна в топології $\sigma(l_1, c_0)$, але для довільної точки $y \in l_1$ не існує точки $\overline{x} \in X_\alpha$ такої, що $\|y - \overline{x}\|_{l_1} = \sup\limits_{x \in X_\alpha} \|y - x\|_{l_1}$.

Нехай f — заданий на X функціонал. Ж. Баранже [5] розглянув узагальнення задачі про найвіддаленішу точку: для $y \in E$ знайти точку $\overline{x} \in X$ таку, що

$$f(\overline{x}) + \|y - \overline{x}\|_E = \sup_{x \in X} (f(x) + \|y - x\|_E). \tag{P}$$

Він довів, що якщо X — непорожня замкнена й обмежена підмножина рівномірно опуклого банахова простору E, функціонал $f\colon X \to \mathbb{R}$ — обмежений зверху та слабко напівнеперервний зверху, то множина $y \in E$ таких, що задача (P) має розв'язок, є масивною. У [6, 7] цей результат перенесено на випадок задачі (P), поставленої у рефлексивному локально рівномірно опуклому банаховому просторі.

С. Кобзаш [8] узагальнює на задачу (P) результат К.-С. Лау, довівши масивність множини $y \in E$ таких, що задача (P) має розв'язок, якщо X — слабко компактна підмножина банахова простору E, а функціонал $f\colon X \to \mathbb{R}$ — обмежений зверху та слабко напівнеперервний зверху.

У роботах [6, 7] результати про типовість існування розв'язків екстремальної задачі (P) було використано при дослідженні задач оптимального керування коефіцієнтами еліптичних рівнянь.

У [9] розглянуто задачу узагальненого найкращого наближення. Відмінність від класичної задачі полягає у використанні для оцінки відхилення елементів функціоналу Мінковського несиметричного замкненого опуклого околу нуля банахова простору. Дослідженню існування узагальнених найвіддаленіших точок присвячено роботу [10].

Нашою метою є доведення типовості розв'язності описаного нижче узагальнення задачі (P) та деяких задач оптимального керування. На цьому шляху ми отримуємо теорему, що узагальнює результати робіт [3, 8].

Постановка задачі та допоміжні факти. Розглянемо дійсний банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ із спряженим $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$. Нехай B — замкнена опукла підмножина простору E така, що $0 \in \operatorname{int} B$. Очевидно, що множина B поглинаюча, але не обов'язково симетрична. Нагадаємо, що функціонал Мінковського $\mu_B\colon E \to \mathbb{R}$ множини B задається таким чином:

$$\mu_B(x) = \inf\{\lambda > 0\colon x \in \lambda B\}, \qquad \forall\, x \in E.$$

Сформулюємо добре відомі властивості функціоналу Мінковського, які випливають безпосередньо з його означення.

Твердження 1. *Для довільних $x \in E$ і $y \in E$ маємо:*
1) $\mu_B(x) \geqslant 0$ *і* $\mu_B(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*
2) $\mu_B(\alpha x) = \alpha\mu_B(x)\ \forall\,\alpha \geqslant 0$*;*
3) $\mu_B(x+y) \leqslant \mu_B(x) + \mu_B(y)$*;*
4) $-\mu_B(y-x) \leqslant \mu_B(x) - \mu_B(y) \leqslant \mu_B(x-y)$*;*
5) $\mu_B(-x) = \mu_{-B}(x)$*;*
6) $\mu_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \operatorname{fr} B$*;*
7) $\mu_B(x) < 1 \Leftrightarrow x \in \operatorname{int} B$*;*
8) $\mu_{\alpha B}(x) = (1/\alpha)\mu_B(x)\ \forall\,\alpha > 0$*;*
9) $m_0\|x\|_E \leqslant \mu_B(x) \leqslant m_1\|x\|_E$, *де* $m_0 = \inf\limits_{x\in E\colon \|x\|_E=1} \mu_B(x)$, $m_1 = \sup\limits_{x\in E\colon \|x\|_E=1} \mu_B(x)$.

Без обмеження загальності будемо вважати, що одинична замкнена куля $B_1(E)$ простору E є підмножиною B.

Нагадаємо, що субдиференціалом опуклого функціоналу $f\colon E \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ у точці $x_0 \in E$ (такій, що $f(x_0) < +\infty$) називається множина $\partial f(x_0) \subseteq E^*$ лінійних неперервних функціоналів x_0^* таких, що $f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x_0^*, x - x_0\rangle_{E^*,E}\ \forall x \in E$. Якщо функціонал f неперервний у точці $x_0 \in E$, то $\partial f(x_0)$ — непорожня опукла та компактна в топології $\sigma(E^*, E)$ множина [7].

Нехай $X \subseteq E$ — непорожня обмежена множина. Для обмеженого зверху функціоналу $f\colon X \to \mathbb{R}$ та точки $y \in E$ розглянемо задачу максимізації

$$f(x) + \mu_B(x-y) \to \sup_{x\in X}. \tag{1}$$

Якщо $B = B_1(E)$, то $\mu_B(\cdot) = \|\cdot\|_E$ і задача (1) збігатиметься з задачею (P).

Теорема про типовість розв'язності. Сформулюємо та доведемо теорему про типовість розв'язності екстремальної задачі (1).

Теорема 1. *Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ — банахів простір; X — непорожня компактна в топології $\sigma(E, E^*)$ підмножина простору E; B — замкнена опукла підмножина простору E така, що $0 \in \operatorname{int} B$, функціонал $f\colon X \to \mathbb{R}$ — обмежений зверху та напівнеперервний зверху в топології $\sigma(E, E^*)$. Тоді множина таких $y \in E$, що задача* (1) *має розв'язок, містить щільну в E підмножину типу G_δ.*

Зауваження 1. Теорема 1 узагальнює результати К.-С. Лау та С. Кобзаша. Якщо покласти $B = B_1(E)$, то отримаємо теорему 1 з [8]. Наведене доведення використовує ідею роботи [3].

Для точки $y \in E$ покладемо

$$r(y) = \sup_{x\in X}(f(x) + \mu_B(x-y)). \tag{2}$$

Вивчимо властивості функціоналу $r\colon E \to \mathbb{R}$, визначеного за допомогою (2).

Лема 1. *Функціонал $y \mapsto r(y)$ опуклий та задовольняє умову Ліпшиця з константою* 1.

Лема 2. *Якщо $y^* \in \partial r(y)$, то*

$$\forall\, x \in E\colon \langle y^*, x\rangle_{E^*,E} \leqslant \mu_{-B}(x).$$

Зауваження 2. З леми 2 випливає, що $\forall\, y^* \in \partial r(y)\colon \|y^*\|_{E^*} \leqslant \sup\limits_{-B} y^* \leqslant 1$.

Лема 3. *Нехай $y \in E$ і $y^* \in \partial r(y)$. Тоді має місце нерівність*

$$\sup_{x\in X}(f(x) + \langle y^*, y - x\rangle_{E^*,E}) \leqslant r(y).$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ введемо множину

$$F_n = \left\{ y \in E \colon \sup_{x \in X} (f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*,E}) \leqslant r(y) - \frac{1}{n} \text{ для деякого } y^* \in \partial r(y) \right\}.$$

Покладемо $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Очевидно, що

$$F = \{ y \in E \colon \sup_{x \in X} (f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*,E}) < r(y) \text{ для деякого } y^* \in \partial r(y) \}.$$

Покажемо, що множина $F \subseteq E$ є множиною першої категорії та має тип F_σ.

Лема 4. $\forall n \in \mathbb{N}$ *множина* F_n *замкнена.*

Лема 5. $\forall n \in \mathbb{N}$ *множина* F_n *має порожню внутрішність.*

Доведення леми 5. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що для деякого $n \in \in \mathbb{N}$ внутрішність множини F_n непорожня. Тобто, існує відкрита куля O з центром в точці $y_0 \in F_n$ і радіусом $2\lambda d$ (де $d = \sup\limits_{x \in X} \|x - y_0\|_E < +\infty$) для деякого $\lambda > 0$, така, що

$$O \subseteq F_n.$$

Покладемо $\varepsilon = \lambda/(4(1+\lambda)n)$.

Оберемо точку $z_0 \in X$ так, що

$$r(y_0) - \varepsilon \leqslant f(z_0) + \mu_B(z_0 - y_0) \leqslant r(y_0) \tag{3}$$

і покладемо

$$x_0 = y_0 + \lambda(y_0 - z_0). \tag{4}$$

На відрізку $[x_0, y_0]$ візьмемо точку $x_1 \in E$ так, що

$$\|x_0 - x_1\|_E = \varepsilon. \tag{5}$$

Оскільки $\|x_0 - y_0\|_E = \lambda \|y_0 - z_0\|_E \leqslant \lambda d < 2\lambda d$, то x_0 і, звичайно, x_1 лежать в кулі $O \subseteq F_n$.

З того, що $x_1 \in F_n$, випливає існування $x_1^* \in \partial r(x_1)$ такого, що

$$\sup_{x \in X} (f(x) + \langle x_1^*, x_1 - x \rangle_{E^*,E}) \leqslant r(x_1) - \frac{1}{n}. \tag{6}$$

З (3) випливає

$$r(y_0) - r(x_1) \leqslant f(z_0) + \mu_B(z_0 - y_0) + \varepsilon - r(x_1). \tag{7}$$

Урахувавши (4), отримаємо

$$z_0 - y_0 = \frac{1}{1+\lambda}(z_0 - x_0) \tag{8}$$

та

$$\mu_B(z_0 - y_0) = \frac{1}{1+\lambda} \mu_B(z_0 - x_0). \tag{9}$$

Оцінимо різницю $r(y_0) - r(x_1)$ зверху, використовуючи (5), (7), (8) та (9),

$$
\begin{aligned}
r(y_0) - r(x_1) &\leqslant f(z_0) + \frac{1}{1+\lambda}\mu_B(z_0 - x_0) + \varepsilon - r(x_1) \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{1+\lambda} r(x_0) + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(z_0) + \varepsilon - r(x_1) \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{1+\lambda}\{r(x_1) + \mu_B(x_1 - x_0)\} + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(z_0) + \varepsilon - r(x_1) \leqslant \\
&\leqslant \frac{\|x_1 - x_0\|_E}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(z_0) + \varepsilon - \frac{\lambda}{1+\lambda} r(x_1) < \frac{\lambda}{1+\lambda}\{f(z_0) - r(x_1)\} + 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

З (6) випливає, що

$$
f(z_0) - r(x_1) \leqslant \langle x_1^*, z_0 - x_1 \rangle_{E^*,E} - \frac{1}{n}.
$$

Таким чином, маємо

$$
r(y_0) - r(x_1) < \frac{\lambda}{1+\lambda}\left\{ \langle x_1^*, z_0 - x_1 \rangle_{E^*,E} - \frac{1}{n} \right\} + 2\varepsilon.
$$

Оскільки $z_0 - x_1 = z_0 - x_0 + x_0 - x_1$ і $\|x_1^*\|_{E^*} \leqslant 1$, то

$$
r(y_0) - r(x_1) < \frac{\lambda}{1+\lambda}\left\{ \langle x_1^*, z_0 - x_0 \rangle_{E^*,E} - \frac{1}{n} \right\} + 3\varepsilon.
$$

З (4) і (8) випливає

$$
r(y_0) - r(x_1) < \langle x_1^*, y_0 - x_0 \rangle_{E^*,E} - \frac{\lambda}{(1+\lambda)n} + 3\varepsilon.
$$

Нарешті отримаємо

$$
r(y_0) - r(x_1) < \langle x_1^*, y_0 - x_1 \rangle_{E^*,E} - \frac{\lambda}{(1+\lambda)n} + 4\varepsilon \leqslant \langle x_1^*, y_0 - x_1 \rangle_{E^*,E}.
$$

Отже,

$$
r(y_0) - r(x_1) < \langle x_1^*, y_0 - x_1 \rangle_{E^*,E},
$$

що суперечить тому, що $x_1^* \in \partial r(x_1)$. Це й доводить лему.

Доведення теореми 1. Нехай $D = E \setminus F$, де $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. З лем 4, 5 та теореми Бера випливає, що множина $D \subseteq E$ скрізь щільна в E та має тип G_δ.

Покажемо, що для кожного $y \in D$ задача (1) має розв'язок. Нехай $y \in D$ та $y^* \in \partial r(y)$. Оскільки $\forall n \in \mathbb{N}\ y \notin F_n$, то

$$
\sup_{x \in X} (f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*,E}) = r(y).
$$

З $\sigma(E, E^*)$-компактності множини X і $\sigma(E, E^*)$-напівнеперервності зверху функціоналу f випливає існування точки $\overline{x} \in X$ такої, що

$$f(\overline{x}) + \langle y^*, y - \overline{x} \rangle_{E^*,E} = \sup_{x \in X} (f(x) + \langle y^*, y - x \rangle_{E^*,E}) = r(y).$$

З іншого боку, за лемою 2, маємо

$$r(y) = f(\overline{x}) + \langle y^*, y - \overline{x} \rangle_{E^*,E} \leqslant f(\overline{x}) + \mu_{-B}(y - \overline{x}) = f(\overline{x}) + \mu_B(\overline{x} - y) \leqslant r(y).$$

Таким чином, точка $\overline{x} \in X$ — розв'язок задачі (1).

Абстрактна задача керування лінійною системою. Нехай $(H, \|\cdot\|_H)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ і $(V, \|\cdot\|_V)$ — банахові простори; $U \subseteq H$ — підмножина допустимих керувань; B — замкнена опукла підмножина простору H така, що $0 \in \operatorname{int} B$.

Розглядається така екстремальна задача:

$$\varphi(y, h) + \mu_B(h - h_0) \to \sup, \tag{10}$$

$$\mathcal{L}y - F(h) = 0, \qquad h \in U. \tag{11}$$

Тут $\mathcal{L}\colon V \to W$ — лінійний неперервний оператор; $F\colon H \to W$ — нелінійний оператор; $\varphi\colon V \times H \to \mathbb{R}$ — заданий функціонал; $h_0 \in H$ — фіксований елемент.

Припустимо, що:

1) простір $(V, \|\cdot\|_V)$ станів системи (11) є рефлексивним;

2) множина $U \subseteq H$ — компактна в топології $\sigma(H, H^*)$;

3) оператор $F\colon H \to W$ — $\sigma(H, H^*)$-$\sigma(W, W^*)$-неперервний, тобто, $h_n \to h$ в топології $\sigma(H, H^*) \Rightarrow F(h_n) \to F(h)$ в топології $\sigma(W, W^*)$;

4) оператор $\mathcal{L}\colon V \to W$ є лінійним топологічним гомоморфізмом V в W, причому $R(\mathcal{L}) \supseteq$ $\supseteq F(U)$;

5) фунціонал $\varphi\colon V \times H \to \mathbb{R}$ — обмежений зверху, напівнеперервний зверху в топології $\sigma(V, V^*)$ і топології $\sigma(H, H^*)$ (із того, що $y_n \to y$ в топології $\sigma(V, V^*)$ і $h_n \to h$ в топології $\sigma(H, H^*)$, випливає $\varphi(y, h) \geqslant \varlimsup_{n \to \infty} \varphi(y_n, h_n)$).

При виконанні умов 1–5 задача (10), (11) може й не мати розв'язків. Але з результату попереднього пункту випливає твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1–5. Тоді існує масивна множина $M \subseteq H$ така, що $\forall\, h_0 \in M$ задача* (10), (11) *має розв'язок.*

Доведення теореми 2. Нехай $h \in U$. Тоді існує єдиний елемент $y = y(h) \in V$ такий, що

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}y - F(h) = 0, \\ &\|y\|_V \leqslant c\|F(h)\|_W, \qquad c > 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Введемо до розгляду функціонал $f\colon H \to \mathbb{R}$:

$$U \ni h \to f(h) = \varphi(y(h), h).$$

Покажемо, що функціонал f — напівнеперервний зверху в топології $\sigma(H, H^*)$ на множині U.

Нехай $h_n \to h$ в топології $\sigma(H, H^*)$ $(h_n, h \in U)$. Позначимо $y_n = y(h_n) \in V$. Оскільки $F(h_n) \to F(h)$ в топології $\sigma(W, W^*)$ і має місце оцінка (12), то множина $\{y_n\}$ обмежена в V.

Простір V рефлексивний, тому можна вважати, що $y_n \to y$ в топології $\sigma(V, V^*)$. Покажемо, що $y = y(h)$. Для довільного $e \in W^*$ в тотожності

$$\langle \mathcal{L}^* e, y_n \rangle_{V^*,V} = \langle e, \mathcal{L} y_n \rangle_{W^*,W} = \langle e, F(h_n) \rangle_{W^*,W} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

перейдемо до границі при $n \to \infty$. Отримаємо

$$\langle \mathcal{L}^* e, y \rangle_{V^*,V} = \langle e, F(h) \rangle_{W^*,W},$$

тобто, $y = y(h)$.

Таким чином, маємо

$$f(h) = \varphi(y(h), h) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \varphi(y(h_n), h_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f(h_n).$$

Після цього теорема 2 випливає з теореми 1.

Автор щиро вдячний професору Ю. І. Петуніну за ряд корисних порад та зауважень. Робота виконана за фінансової підтримки ДФФД України.

1. *Edelstein M.* Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces // Israel J. Math. – 1965. – **4**. – P. 171–176.
2. *Aslpund E.* Farthest points in reflexive locally uniformly rotund Banach spaces // Idib. – P. 213–216.
3. *Lau K.-S.* Farthest points in weakly compact sets // Ibid. – 1975. – **22**. – P. 168–174.
4. *Deville R., Zizler V.* Farthest points in w^*-compact sets // Bull. Austral. Math. Soc. – 1988. – 38 (3). – P. 433–439.
5. *Baranger J.* Existence de solutions pour des problemes d'optimisation non convexes // J. Math. Pures Appl. – 1973. – **52**. – P. 377–406.
6. *Baranger J., Temam R.* Nonconvex optimization problems depending on a parameter // SIAM J. Control. – 1975. – **13**. – P. 146–152.
7. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – Москва: Мир, 1979. – 399 с.
8. *Cobzas S.* Nonconvex optimization problems on weakly compact subsets of Banach spaces // Anal. Numer. Theor. Approx. – 1980. – **9**. – P. 19–25.
9. *De Blasi F. S., Myjak J.* On a generalized best approximation problem // J. Approx. Theory. – 1998. – **94**. – P. 54–72.
10. *Ni R. X.* Derivatives of generalized farthest functions and existence of generalized farthest points // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – **316**. – P. 642–651.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 01.01.2008