УДК 539.3



Член-кореспондент НАН України **Я. Й. Бурак, Г. І. Мороз, З. В. Бойко**

# Математична модель термомеханіки з урахуванням дисипативних процесів при формуванні приповерхневих явищ

*A mathematical model of the mechanics of thermoelastic bodies is proposed for the description of near-surface phenomena which are related to dissipative processes under the system transition from the equilibrium state to a stationary one. In this case, the parametric dependence of the constitutive equations on the initial (natural) state parameters is taken into account.*

Розрахунок та оптимізація параметрів міцності та надійності елементів конструкцій та приладів, які працюють в умовах статичного та динамічного силового навантаження і нагріву, є актуальною проблемою сучасної механіки деформівних систем [1, 2]. В цьому зв'язку важливими є питання конструктивної побудови математичних моделей механіки, які б найбільш повно відображали кінетику формування приповерхневих явищ, що є визначальною для кількісної оцінки параметрів міцності. При побудові таких моделей у науковій літературі використовують підходи та методи термодинаміки нерівноважних процесів, започатковані у класичних роботах Дж. Гіббса [3] та А. Гріффітса [4].

Використання енергетичного підходу до термодинамічного опису формування приповерхневих явищ в термопружних системах та встановлення відповідного стаціонарного стану проаналізовано у роботі [5].

Питання побудови математичних моделей термомеханіки твердих розчинів з урахуванням локальної градієнтності температурного поля і поля хімічного потенціалу розглянуто у роботах [6, 7], в яких проаналізовано можливості використання такого підходу для опису приповерхневих явищ. Зокрема, у [7] одержана оцінка параметрів міцності в задачі про дифузійне насичення двокомпонентного термопружного шару.

У роботі [8] наведено результати модельного опису термомеханічних процесів у пружних тілах за підходом Ейлера з урахуванням вектора локального зміщення маси, який введений в [9, 10].

У даній роботі в розвиток термодинамічного підходу до опису приповерхневих явищ пропонується математична модель механіки термопружного тіла, у якій формування приповерхневих явищ пов'язане з дисипативними процесами переходу пружної системи від початкового рівноважного стану до стаціонарного, якому відповідає мінімум виникнення ентропії.

**Основне енергетичне співвідношення.** Розглядається термопружне тіло $K_*$, яке взаємодіє із зовнішнім середовищем $K_*^+$. За відліковий стан приймаємо однорідний термодинамічний стан (для $t \leqslant t_0$, $t$ — час), який реалізується за відсутності взаємодії тіла із зовнішнім середовищем (природний стан). Природний стан тіла характеризується абсолютною температурою $T_{(0)}$ і густиною ентропії $S_{(0)}$, хімічним потенціалом $\mu_{(0)}$ і густиною маси $\rho_{(0)}$, тиском $P_{(0)}$ і питомим об'ємом $V_{(0)} = \rho_{(0)}^{-1}$.

Вважаємо, що формування приповерхневих явищ зумовлене взаємодією термопружного тіла $K_*$ із зовнішнім середовищем $K_*^+$ в процесі переходу тіла $K_*$ із вихідного природного (однорідного) стану до градієнтного стаціонарного в межах системи $K_* \bigcup K_*^+$ протягом часу $t_1 < t \leqslant t_2$ $(t_1 > t_0)$.

Інтегральною адитивною мірою термопружного стану тіла $K_*$ для $t > t_0$ є його енергія

$$E(K_*, t) = E(X_*(t) \bigcup \partial X_*(t)), \tag{1}$$

де $X_*(t) \bigcup \partial X_*(t)$ — область евклідового простору, яку займає термопружне тіло $K_*$ в момент часу $t \in (t_1, t_2)$.

Згідно із законом збереження, приріст енергії системи подається сумою лінійних складових приросту енергії системи $K_*$ на проміжку часу $[t, t + dt]$

$$dE(K_*, t) = \delta Q_*^{(+)} + \delta A_*^{(+)}, \tag{2}$$

де складова $\delta Q_*^{(+)}$ зумовлена тепловою взаємодією термопружного тіла $K_*$ із середовищем $K_*^+$, а складова $\delta A_*^{(+)}$ — відповідно механічною взаємодією тіла $K_*$ із середовищем $K_*^+$.

Аналогічне за формою рівняння балансу енергії подамо для довільної мислено виділеної підсистеми $K \subset K_*$

$$dE(K, t) = \delta Q^{(+)} + \delta A^{(+)}. \tag{3}$$

Тут $\delta Q^{(+)}$, $\delta A^{(+)}$ — лінійні складові приросту енергії системи $K$, який зумовлений взаємодією цієї системи із середовищем $K^+ = K_*^+ \bigcup K_* \setminus K$. Складова $\delta Q^{(+)}$ кількісно характеризує теплові процеси (теплопровідність і теплоперенос), а $\delta A^{(+)}$ — приріст механічної енергії, зумовлений масоперенесенням та пружним деформуванням.

Для локального опису термомеханічних процесів сконкретизуємо за підходом Лагранжа енергетичне співвідношення (3) для довільно виділеної фізично малої підсистеми $\delta K \subset K$:

$$dE(\delta K, t) = d(E(\vec{r}, t)\delta V), \tag{4}$$

де $E(\vec{r}, t)$ — густина енергії, віднесена до об'єму $\delta V(t)$ підсистеми $\delta K$ у момент часу $t$.

Надалі всі адитивні параметри моделі нормуватимемо за геометричними характеристиками фізично малої підсистеми $\delta K$ у відліковому природному стані. Тоді рівняння балансу (3) набуває вигляду

$$dE(\delta K, t) = dE_0 \delta V_0, \tag{5}$$

$$dE_0 = C_V dT + C_V^* d\mu + \widehat{\sigma} \cdot d(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r})^T + (\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma} + \vec{f}^+) \cdot d\vec{u}. \tag{6}$$

Тут $E_0 = E_0(\vec{r}_0, t)$ — густина енергії фізично малої підсистеми $\delta K \subset K$; $C_V = C_V(\vec{r}_0, t)$ — густина теплоємності; $C_V^* = C_V^*(\vec{r}_0, t)$ — густина "енергоємності" масової підсистеми; $T = T(\vec{r}_0, t)$ — абсолютна температура; $\mu = \mu(\vec{r}_0, t)$ — хімічний потенціал; $\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(\vec{r}_0, t)$ — тензор напружень Піоли–Кірхгофа першого роду; $\vec{f}^+ = \vec{f}^+(\vec{r}_0, t)$ — вектор густини об'ємних сил; $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$ — тензор градієнта місця (несиметричний тензор деформації матеріальної підсистеми); $\vec{r} \equiv \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{u}(\vec{r}_0, t)$ — радіус-вектор місця матеріальної точки $k \in K_*$ у момент часу $t$; $\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0$ — вектор переміщення. Крапкою між величинами позначено скалярний добуток, $\otimes$ — тензорний (діадний) добуток. Відзначимо, що у формулі (6) символом $T$ позначено операцію транспонування тензора $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$.

**Термодинамічні аспекти моделі.** За законом збереження енергії

$$C_V dT + C_V^* d\mu = -P dV - \vec{\nabla}_0 \cdot [\vec{J}_Q + (\mu - \mu_{(0)})\vec{J}_M]dt, \tag{7}$$

де $P$ — тиск; $V = \rho^{-1}$ — питомий об'єм; $\vec{J}_Q$ і $\vec{J}_M$ — потік енергії теплової форми руху і маси відповідно.

Якщо використати базове термодинамічне рівняння $\vec{J}_Q = T\vec{J}_s$ ($\vec{J}_s$ — потік ентропії), то співвідношення (7) запишеться так:

$$C_V dT + C_V^* d\mu = -P dV + \{-T\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{J}_s - (\mu - \mu_0)\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{J}_M + (-\vec{\nabla}_0 T) \cdot \vec{J}_s + \\ + [-\vec{\nabla}_0(\mu - \mu_{(0)})] \cdot \vec{J}_M\}dt. \tag{8}$$

У цьому зв'язку енергетичне співвідношення (6) набуває форми

$$dE_0 = -P dV + \widehat{\sigma}_0 \cdot d\widehat{e} + (\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma} + \vec{f}^+) \cdot d\vec{u} - \widehat{\sigma}_* \cdot d(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})^a + \\ +\{T(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{J}_s) + (\mu - \mu_{(0)})(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{J}_M) + (-\vec{\nabla}_0 T) \cdot \vec{J}_s + [-\vec{\nabla}_0(\mu - \mu_{(0)})] \cdot \vec{J}_M\}dt. \tag{9}$$

Тут $\widehat{e} = (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0)/2$ — симетричний тензор деформації; $(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})^a = (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} - \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0)/2$ — антисиметрична складова тензора градієнта місця; $\widehat{\sigma}_0$, $\widehat{\sigma}_*$ — симетрична та антисиметрична складові тензора напружень $\widehat{\sigma}$.

З урахуванням другого закону термодинаміки $-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{J}_s = ds/dt - \sigma_s$ ($\sigma_s \geqslant 0$ — виникнення ентропії) енергетичне співвідношення (9) набуває вигляду

$$dE_0 = T ds - P dV + (\mu - \mu_{(0)})d(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M) + \widehat{\sigma}_0 \cdot d\widehat{e} + \{-T\sigma_s + (\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma} + \vec{f}^+) \cdot \vec{v} + \\ + [-\widehat{\sigma}_* \cdot (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v})^a] + (-\vec{\nabla}_0 T) \cdot \vec{J}_s + [-\vec{\nabla}_0(\mu - \mu_{(0)})] \cdot \vec{J}_M\}dt, \tag{10}$$

де $\vec{\Pi}_M = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{J}_M d\widetilde{t}$ — вектор локального пружного зміщення центра мас системи [9]; $\vec{v} = d\vec{u}/dt$.

Одержане енергетичне співвідношення (10) дає можливість встановити два базові співвідношення локального термодинамічного опису, а саме рівняння Гіббса:

$$dE_0 \equiv dU = T ds - P dV + (\mu - \mu_{(0)})d(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M) + \widehat{\sigma}_0 \cdot d\widehat{e} \tag{11}$$

та вираз для виникнення ентропії (характеристику дисипативних процесів)

$$\sigma_s = \frac{1}{T}\{(\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma} + \vec{f}^+) \cdot \vec{v} - \widehat{\sigma}_* \cdot (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v})^a + (-\vec{\nabla}_0 T) \cdot \vec{J}_s + [-\vec{\nabla}_0(\mu - \mu_{(0)})] \cdot \vec{J}_M\}. \tag{12}$$

Виникненню ентропії (12) відповідає така диференціальна 1-форма:

$$d\Psi = \frac{1}{T}\{(\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma} + \vec{f}^+) \cdot d\vec{u} + (-\widehat{\sigma}_*) \cdot d(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})^a + (-\vec{\nabla}_0 T) \cdot d\vec{\Pi}_s + \\ + [-\vec{\nabla}_0(\mu - \mu_{(0)})] \cdot d\vec{\Pi}_M\}, \tag{13}$$

де $\Psi = \int\limits_{t_0}^{t} \sigma_s d\widetilde{t}$ — дисипативний потенціал; $\vec{\Pi}_s = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{J}_s d\widetilde{t}$. За потенціального опису дисипативних процесів диференціальна 1-форма (13), яка є повним диференціалом на фазовому просторі параметрів $\vec{u}$, $(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})^a$, $\vec{\Pi}_s$, $\vec{\Pi}_M$, є базовою для опису дисипативних процесів у тілі.

**Ізотермічні процеси.** Надалі обмежимося розглядом ізотермічних процесів ($T = T_{(0)}$). За функцію локального стану приймемо вільну енергію Гельмгольца $F = U - T_{(0)}S$.

Тоді визначальні співвідношення (11) та (13) подамо так:

$$dF = -Pd(\rho^{-1}) + \frac{1}{3}\sigma_0 de + \widehat{\sigma}_0^d \cdot d\widehat{e}^d + (\mu - \mu_{(0)})d(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M), \tag{14}$$

$$d\Psi = \frac{1}{T_0}\{(\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma} + \vec{f}^+) \cdot d\vec{u} + (-\widehat{\sigma}_*) \cdot d(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})^a + [-\vec{\nabla}_0(\mu - \mu_{(0)})] \cdot d\vec{\Pi}_M\}. \tag{15}$$

Тут у базовому рівнянні (14) $\sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$; $e = \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}$ — об'ємна деформація фізично малої підсистеми; $\widehat{\sigma}_0^d = \widehat{\sigma}_0 - \sigma_0\widehat{I}/3$ — девіатор тензора напружень $\widehat{\sigma}_0$; $\widehat{e}^d = \widehat{e} - e\widehat{I}/3$ — девіатор тензора деформації $\widehat{e}$; $\widehat{I}$ — одиничний тензор.

В рамках потенціального опису диференціальна 1-форма (14) для вільної енергії є повним диференціалом, який заданий на фазовому просторі параметрів $\rho^{-1}$, $e$, $\widehat{e}^d$, $-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M$. Така диференціальна 1-форма є вихідною при встановленні рівнянь локального термодинамічного стану (фізичні співвідношення).

**Рівняння локального термодинамічного стану.** З метою конкретизації базових фізичних співвідношень локального термодинамічного стану приймемо

$$\rho = \rho_{(0)}(1 - e), \qquad P = P\left[\frac{1}{\rho_0(1 - e)}\right], \qquad \sigma_0 = 3Ke, \tag{16}$$

де $K$ — модуль об'ємного стиску.

В лінійному наближенні диференціальна 1-форма (14) набуває вигляду

$$dF = \frac{1}{3}\sigma_0^* de + \widehat{\sigma}_0^d \cdot d\widehat{e}^d + (\mu - \mu_{(0)})d(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M). \tag{17}$$

Тут введено позначення:

$$\frac{1}{3}\sigma_0^* = -\frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}} + K_* e, \qquad K_* = K - \frac{2P_{(0)}}{\rho_{(0)}} - \frac{1}{\rho_{(0)}^2}\frac{\partial P}{\partial(1/\rho)}\bigg|_{(1/\rho_{(0)})}. \tag{18}$$

За потенціального опису локального термодинамічного стану тіла диференціальна 1-форма (17) є повним диференціалом функції

$$F = F(e, \widehat{e}^d, -\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M). \tag{19}$$

Якщо функція (19) є заданою, то отримаємо такі фізичні співвідношення:

$$\begin{gathered}\sigma_0^* = 3\frac{\partial F}{\partial e} = \sigma_0^*(B), \qquad \widehat{\sigma}_0^d = \frac{\partial F}{\partial \widehat{e}^d} = \widehat{\sigma}_0^d(B), \\ \mu - \mu_{(0)} = \frac{\partial F}{\partial(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M)} = (\mu - \mu_{(0)})(B),\end{gathered} \tag{20}$$

де $B = (e, \widehat{e}^d, -\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M)$.

Для подальшої конкретизації структури фізичних співвідношень (20) приймемо, що однорідний початковий стан тіла є ізотропним і в околі цього стану вільна енергія $F = F(e, \widehat{e}^d, -\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M)$ є аналітичною функцією вказаних параметрів. Якщо обмежитись квадратичним наближенням її розкладу в околі початкового стану

$$F = F_0 - \frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}}e + \frac{1}{2}\alpha_1 e^2 + \frac{1}{2}\alpha_2(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M)^2 + \frac{1}{2}\alpha_3(\widehat{e}^d \cdot \widehat{e}^d) - \alpha_4 e(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M), \tag{21}$$

одержимо такі фізичні співвідношення:

$$\frac{1}{3}\sigma_0^* = -\frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}} + K_* e - \beta(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M),$$
$$\widehat{\sigma}_0^d = 2G\widehat{e}^d, \qquad \mu - \mu_{(0)} = \alpha(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M) - \beta e, \tag{22}$$

де $G$ — модуль зсуву, а коефіцієнти $\alpha$ та $\beta$ будуть $\alpha = [\partial(\mu - \mu_{(0)})/\partial(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M)]_0$, $\beta = (1/3)[\partial\sigma_0^*/\partial(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M)]_0$.

Тоді симетрична складова тензора напружень подається так

$$\widehat{\sigma}_0 = \left[-\frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}} + K_* e + \beta(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M)\right]\widehat{I} + 2G\widehat{e}^d. \tag{23}$$

**Опис дисипативних процесів.** Поставимо у відповідність до антисиметричних тензорів $\widehat{\sigma}_*$ та $(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})^a$ супутні вектори

$$\vec{\sigma}_* = \frac{1}{2}(\sigma_{23} - \sigma_{32})\vec{e}_1 + \frac{1}{2}(\sigma_{31} - \sigma_{13})\vec{e}_2 + \frac{1}{2}(\sigma_{12} - \sigma_{21})\vec{e}_3,$$
$$\vec{\varphi} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}_0 \times \vec{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\vec{e}_3. \tag{24}$$

Тоді диференціальна 1-форма (15) набуває вигляду

$$d\Psi = \frac{1}{T_{(0)}}\{(\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma} + \vec{f}^+) \cdot d\vec{u} + (-\vec{\sigma}_*) \cdot d\vec{\varphi} + [-\vec{\nabla}_0(\mu - \mu_0)] \cdot d\vec{\Pi}_M\}. \tag{25}$$

Надалі вважаємо, що дисипативний потенціал $\Psi = \Psi(\vec{u}, \vec{\varphi}, \vec{\Pi}_M)$ є заданим. За умов потенціального опису з формули (25) отримуємо загальну структуру вихідних співвідношень для опису дисипативних процесів

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma} + \vec{f}^+ = T_{(0)}\frac{\partial\Psi(B_*)}{\partial\vec{u}}, \quad \vec{\sigma}_* = -T_{(0)}\frac{\partial\Psi(B_*)}{\partial\vec{\varphi}}, \quad \vec{\nabla}_0(\mu - \mu_{(0)}) = -T_{(0)}\frac{\partial\Psi(B_*)}{\partial\vec{\Pi}_M}, \tag{26}$$

де $B_* = (\vec{u}, \vec{\varphi}, \vec{\Pi}_M)$.

Подамо дисипативний потенціал $\Psi = \Psi(\vec{u}, \vec{\varphi}, \vec{\Pi}_M)$ у формі поліноміальної функції скалярних інваріантів параметрів $\vec{u}$, $\vec{\varphi}$, $\vec{\Pi}_M$ до другого порядку включно, а саме:

$$I_{11} = (\vec{u} \otimes \vec{u}) \cdot \widehat{I}, \qquad I_{22} = (\vec{\varphi} \otimes \vec{\varphi}) \cdot \widehat{I}, \qquad I_{33} = (\vec{\Pi}_M \otimes \vec{\Pi}_M) \cdot \widehat{I},$$
$$I_{12} = (\vec{u} \otimes \vec{\varphi}) \cdot \widehat{I}, \qquad I_{13} = (\vec{u} \otimes \vec{\Pi}_M) \cdot \widehat{I}, \qquad I_{23} = (\vec{\varphi} \otimes \vec{\Pi}_M) \cdot \widehat{I}.$$

Тоді кінетичні рівняння (26) запишемо так:

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma} + \vec{f}^+ = T_{(0)}(\beta_1\vec{u} - \gamma_1\vec{\varphi} - \gamma_2\vec{\Pi}_M), \qquad \vec{\sigma}_* = -T_{(0)}(\beta_2\vec{\varphi} - \gamma_1\vec{u} - \gamma_3\vec{\Pi}_M),$$
$$\vec{\nabla}_0(\mu - \mu_{(0)}) = -T_{(0)}(\beta_3\vec{\Pi}_M - \gamma_2\vec{u} - \gamma_3\vec{\varphi}). \tag{27}$$

Якщо використати у кінетичних співвідношеннях (27) рівняння локального термодинамічного стану (22), (23), то отримаємо ключову систему рівнянь моделі для опису дисипативних процесів

$$\begin{aligned}
&\left(K_* - \frac{2}{3}G\right)\vec{\nabla}_0(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) + G[\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0)] + \vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma}_* = \\
&\qquad = T_{(0)}\beta_1\vec{u} - \beta\vec{\nabla}_0(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M) - T_{(0)}\left[\gamma_2\vec{\Pi}_M + \frac{\gamma_1}{2}(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u})\right] - \vec{f}^+, \\
&\vec{\sigma}_* = T_{(0)}[G'(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) - \gamma_1\vec{u} - \gamma_3\vec{\Pi}_M], \\
&\alpha\vec{\nabla}_0(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M) + T_{(0)}\beta_3\vec{\Pi}_M = \beta\vec{\nabla}_0(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) + T_{(0)}\left[\gamma_2\vec{u} + \frac{\gamma_3}{2}(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u})\right].
\end{aligned} \tag{28}$$

Якщо із системи (28) виключити антисиметричний тензор напружень

$$\widehat{\sigma}_* = T_{(0)}\widehat{\in} \cdot [G'(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) - \gamma_1\vec{u} - \gamma_3\vec{\Pi}_M], \tag{29}$$

отримаємо базову систему рівнянь для визначення вектора переміщення $\vec{u}$ та вектора пружного зміщення маси $\vec{\Pi}_M$

$$\begin{aligned}
&\left(K_* - \frac{2}{3}G\right)\vec{\nabla}_0(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) + G\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}_0 \cdot [G(\vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0) + G'T_{(0)}\widehat{\in} \cdot (\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) - \gamma_1 T_{(0)}(\widehat{\in} \cdot \vec{u})] + \\
&\qquad + \frac{1}{2}T_{(0)}\gamma_1(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) = T_{(0)}\beta_1\vec{u} - \beta\vec{\nabla}_0(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M) + T_{(0)}[\gamma_3\vec{\nabla}_0 \cdot (\widehat{\in} \cdot \vec{\Pi}_M) - \gamma_2\vec{\Pi}_M] - \vec{f}^+, \\
&\alpha\vec{\nabla}_0(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M) + T_{(0)}\beta_3\vec{\Pi}_M = \beta\vec{\nabla}_0(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) + T_{(0)}\left[\gamma_2\vec{u} + \frac{1}{2}\gamma_3(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u})\right].
\end{aligned} \tag{30}$$

При цьому антисиметрична складова тензора напружень визначається співвідношенням (29).

Для випадку модельного опису дисипативних процесів за умов нехтування ефектів їх взаємовпливу ключова система рівнянь (30) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&\left(K_* - \frac{2}{3}G\right)\vec{\nabla}_0(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) + G\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}_0 \cdot [G(\vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0) + G'T_{(0)}\widehat{\in} \cdot (\vec{\nabla}_0 \times \vec{u})] = \\
&\qquad = T_{(0)}\beta_1\vec{u} - \beta\vec{\nabla}_0(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M) - \vec{f}^+, \\
&\alpha\vec{\nabla}_0(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M) + T_{(0)}\beta_3\vec{\Pi}_M = \beta\vec{\nabla}_0(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}).
\end{aligned} \tag{31}$$

Відповідний антисиметричний тензор напружень (29) в такому наближенні буде

$$\widehat{\sigma}_* = T_{(0)}\widehat{\in} \cdot [G'(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u})]. \tag{32}$$

Запропонована математична модель механіки термопружного тіла дає змогу описувати формування приповерхневих явищ, яке пов'язується з протіканням дисипативних процесів при переході системи від рівноважного стану до стаціонарного. При цьому враховується параметрична залежність фізичних співвідношень від параметрів природного початкового стану.

Одержані результати є базовими для постановки та розв'язування крайових задач термомеханіки пружних систем з урахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності.

*Робота виконана за часткової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень Міністерства науки та освіти України.*

1. *Третьяченко Г. Н., Карпинос Б. С.* Прочность и долговечность материалов при циклических тепловых воздействиях. – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.
2. *Третьяченко Г. Н., Карпинос Б. С., Барило В. Г.* Разрушение материалов при циклических нагревах. – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.
3. *Гиббс Дж. В.* Термодинамика. Статистическая механика. – Москва: Наука, 1982. – 584 с.
4. *Гріффітс А. А.* Явища розриву і течіння в твердих тілах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1993. – **29**, № 3. – С. 13–42.
5. *Бурак Я. Й., Чапля Є. Я.* Про термодинамічні аспекти приповерхневих явищ у термопружних системах // Там само. – 2006. – **42**, № 1. – С. 39–44.
6. *Бурак Я. Й., Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Про один підхід до врахування приповерхневої неоднорідності в термомеханіці твердих розчинів // Доп. НАН України. – 1991. – № 11. – С. 47–51.
7. *Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Кондрат В. Ф. та ін.* Фізико-математичне моделювання та дослідження нерівноважних процесів у деформівних локально-неоднорідних багатокомпонентних твердих тілах // Бібліотека державного фонду фундаментальних досліджень. – Київ: Академперіодика, 2005. – С. 103–119.
8. *Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 45–49.
9. *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення локально градієнтної термомеханіки // Доп. АН УРСР. Серія А. – 1987. – № 12. – С. 19–23.
10. *Бурак Я. Й.* Локально градієнтні моделі термопружності для тіл з мікродефектами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1996. – № 2. – С. 15–23.

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

*Надійшло до редакції 11.02.2008*