УДК 531.36

Р. В. Муллажонов

Обобщенное транспонирование матриц и структуры линейных крупномасштабных систем

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Розвинуто поняття узагальненого транспонування матриць і вказано застосування до класифікації великомасштабних лінійних систем.

Обобщенное транспонирование матрицы (см. [1]). Обобщенным транспонированием произвольной матрицы A будем называть перестановку ее элементов по определенным законам или правилам.

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ $(m \leqslant n)$. Элементарными перестановками произвольных элементов матрицы являются:

1) перестановка строк (столбцов) со столбцами (строками) матрицы в прямом порядке;

2) перестановка строк (столбцов) со столбцами (строками) матрицы в обратном порядке;

3) перестановка i-строки с $(m + 1 - i)$-строками, $i = 1, 2, \ldots, m$;

4) перестановка j-столбца с $(n + 1 - j)$-столбцом, $j = 1, 2, \ldots, n$;

5) перестановка i-строки с $(m + 1 - i)$-строками и j-столбца $(n + 1 - j)$-столбцами, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Известно, что каждую прямоугольную матрицу можно отождествить с некоторым прямоугольником, в котором будут содержаться все элементы рассматриваемой матрицы.

Главной (неглавной) диагональю матрицы A называется отрезок прямой, проходящий через точки, содержащие элементы a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, m$ $(a_{i,m+1}, i = 1, 2, \ldots, m)$. Вертикальной (горизонтальной) осью матрицы A называется вертикальная (горизонтальная) ось симметрии прямоугольника. Центром матрицы называется центр симметрии прямоугольника. Отметим, что главная (неглавная) диагональ матрицы A не совпадает с диагональю прямоугольника. Поэтому при транспонировании размерность матрицы изменяется на $n \times m$. Если $m = n$, то главная (неглавная) диагональ матрицы A совпадает с левой (правой) диагональю квадрата.

Итак, с геометрической точки зрения транспонирование матрицы осуществляется относительно точки или прямой. Если точка (прямая) является центром (осью) симметрии прямоугольника, в котором лежит матрица, то размерность транспонированной матрицы не изменяется. Элементы матрицы, расположенные в точке или на прямой, относительно которой осуществляется транспонирование, остаются неизменными.

Транспонированной матрице соответствует прямоугольник, повернутый на 180° вокруг точки или прямой, относительно которой осуществляется транспонирование.

Для раскрытия связи обобщенного транспонирования матриц со структурой линейной крупномасштабной механической системы (КМС) установим следующие соответствия.

Пусть $A = (a_{ij})$ — прямоугольная матрица размера $m \times n$ (для определенности $m \leqslant n$) и КМС в $\mathbb{R}^n$ состоит из m свободных подсистем. Элементам главной диагонали матрицы a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, m$, соответствуют свободные подсистемы так, что подсистема, соответствующая элементу a_{ii}, $i = 1, 2, \dots, m$, уравновешивается с подсистемой, соответствующей элементу $a_{m+1-i,m+1-i}$. При этом элементам a_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, m$, $i < j$ $(i > j)$, соответствуют связи (обратные связи) между свободнымы подсистемами a_{ii} и a_{jj}, i, $j = 1, 2, \dots, m$, т. е. имеет место влияние подсистемы a_{ii} (a_{jj}) на подсистему, соответствующую a_{jj} (a_{ii}). Эти связи будем называть внутренними связями КМС. Остальным элементам, т. е. элементам a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = m+1, \dots, n$, соответствуют связи свободных подсистем с другими подсистемами, которые действуют вместе с данной КМС. Эти связи будем называть внешними связями. При этом все связи являются внутренними.

Отметим, что при таком соответствии элементам в неглавной диагонали соответствуют связи уравновешивающих подсистем. Если m четно, то для каждой свободной подсистемы существует уравновешивающаяся подсистема. Если m нечетно, то одна подсистема, соответствующая элементу $a_{(m+1)/2,(m+1)/2}$, не имеет уравновешивающей подсистемы. Поэтому эту подсистему будем называть эталонной и рассматривать ее отдельно (например, в крупномасштабной энергетической системе одна машина обычно рассматривается как эталонная).

Следовательно, процесс транспонирования описывает изменение внутренней структуры КМС.

Теперь сформулируем определения элементарных транспонирований матрицы A.

Матрица $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, называется транспонированной относительно:

1) главной диагонали (обозначаем это $A^T = a_{ij}$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$), если она получена перестановкой строк (столбцов) со столбцами (строками) матрицы A в прямом порядке;

2) неглавной диагонали $A^{\perp} = a_{n+1-i,m+1-j}$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, если она получена перестановкой строк (столбцов) со столбцами (строками) матрицы A в обратном порядке;

3) горизонтальной оси $A^{-} = a_{m+1-i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, если она получена перестановкой i-строки с $m+1-i$-строками матрицы A;

4) вертикальной оси $A^{|} = a_{i,n+1-j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, если она получена перестановкой j-столбца с $n+1-j$-столбцами матрицы A;

5) центра $A^0 = a_{m+1-i,n+1-j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, если она получена перестановкой i-строки с $m+1-i$-строками и j-столбца с $n+1-j$-столбцами матрицы A.

С геометрической точки зрения смысл приведенного определения состоит в том, что поворот соответствующего прямоугольника на 180° происходит вокруг прямой, проходящей через:

a) главную диагональ матрицы A;

b) неглавную диагональ матрицы A,

c) горизонтальную ось матрицы A;

d) вертикальную ось матрицы A;

e) центр матрицы A.

Применительно к КМС смысл обобщенного транспонирования состоит в адекватном описании внутренней структуры КМС при определенных физических изменениях. При этом структура КМС может изменяется так, что:

1) не изменяя свободных подсистем, преобразуются только связи между свободными подсистемами с соответствующими обратными связями;

2) не изменяя связей, преобразуются обратные связи между уравновешивающимися парами свободных подсистем либо преобразуются уравновешивающие подсистемы между со-

бой и связи (обратные связи), кроме связей (обратных связей) между уравновешивающимися парами подсистем;

3) преобразуются в обратном порядке свободные подсистемы с обратными связями и связями, соответствующими парам уравновешивающих свободных подсистем;

4) преобразуются в прямом порядке свободные подсистемы со связями и обратными связями между соответствующими парами уравновешивающих свободных подсистем;

5) полностью преобразуются соответствующие уравновешивающие свободные пары подсистем между собой и их связи с обратными связями, кроме эталонной подсистемы (если она есть).

Замечания. 1. Если n (m) нечетно, то при транспонировании относительно вертикальной (горизонтальной) оси не изменяется эталонная подсистема и, соответственно, вертикальные (горизонтальные) связи, обратные связи, связанные с этими подсистемами, также не изменяются. Если n (m) четно, то такая подсистема не существует.

2. Если n и m нечетные, то при транспонировании матрицы A относительно центра в структуре КМС только эталонная подсистема не изменяется. Если m или n четные, то такая подсистема не существует.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений для приведенных транспонированных матриц:

1. Если A и B — прямоугольные матрицы размера $m \times n$, то

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \qquad (A+B)^\perp = A^\perp + B^\perp, \qquad (A+B)^| = A^| + B^|,$$
$$(A+B)^- = A^- + B^-, \qquad (A+B)^0 = A^0 + B^0.$$

2. Если A и B — прямоугольные матрицы размера $m \times n$, $\alpha \neq 0$ — действительное число, то

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T, \qquad (\alpha A)^\perp = \alpha A^\perp, \qquad (\alpha A)^| = \alpha A^|,$$
$$(\alpha A)^- = \alpha A^-, \qquad (\alpha A)^0 = \alpha A^0.$$

3. Если A — прямоугольная матрица размера $m \times n$, то

$$(A^T)^T = A, \qquad (A^\perp)^\perp = A, \qquad (A^|)^| = A,$$
$$(A^-)^- = A, \qquad (A^0)^0 = A.$$

4. Если A и B — прямоугольные матрицы размера $m \times n$ и $n \times m$ соответственно, то

$$(AB)^T = B^T A^T, \qquad (AB)^\perp = B^\perp A^\perp, \qquad (AB)^0 = B^0 A^0.$$

5. Если A — квадратная матрица n-го порядка, то

$$(A^T)^\perp = (A^\perp)^T = A^0, \qquad (A^|)^- = (A^-)^| = A^0, \qquad (A^0)^T = (A^T)^0 = A^\perp,$$
$$(A^0)^\perp = (A^\perp)^0 = A^T, \qquad (A^0)^| = (A^|)^0 = A^-, \qquad (A^0)^- = (A^-)^0 = A^|.$$

6. Если A — квадратная матрица n-го порядка, то

$$A = (A^0)^{-1}(A^T A^\perp)^T = (A^0)^{-1}(A^\perp A^T)^\perp = (A^\perp A^T)^T (A^0)^{-1} = (A^T A^\perp)^\perp (A^0)^{-1}.$$

7. Если A — неособенная квадратичная матрица, то

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, \qquad (A^{-1})^{\perp} = (A^{\perp})^{-1}, \qquad (A^{-1})^{|} = (A^{|})^{-1},$$

$$(A^{-1})^{-} = (A^{-})^{-1}, \qquad (A^{-1})^{0} = (A^{0})^{-1}.$$

8. Если A — квадратичная матрица, то справедливы следующие равенства:

а) $E^{|}A = E^{-}A = A^{-}$,

б) $AE^{|} = AE^{-} = A^{|}$,

в) $E^{|}AE^{|} = E^{-}AE^{-} = A^{0}$,

г) $A^TE^{|} = A^{|}, \quad E^{|}A^T = A^{-}$,

д) $A^{\perp}E^{|} = A^{-}, \quad E^{|}A^{\perp} = A^{|}$,

е) $A^{-}E^{|} = A^{0}, \quad E^{|}A^{-} = A$,

ж) $A^{|}E^{|} = A$,

где E — единичная матрица,

$$E^{|} = E^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Если A — квадратная матрица n-го порядка, то

$$|A^T| = |A^{\perp}| = |A^{0}| = |A|, \qquad |A^{|}| = |A^{-}| = (-1)^{\alpha}|A|,$$

где α — количество перестановок столбцов или строк матрицы A, которые выполняются для получения из A матрицы $A^{|}$ или A^{-}. Справедливость этих равенств следует из определения 2 и свойств детерминанта.

10. Если A — квадратная матрица n-го порядка, E — единичная матрица n-го порядка и λ — параметр, то

$$|A^T - \lambda E| = |A^{\perp} - \lambda E| = |A^{0} - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Справедливость этих равенств, следует из свойств 1, 2, 7 и $E = E^T = E^{\perp} = E^{0}$.

11. $\mathrm{Sp}(A^T) = \mathrm{Sp}(A^{\perp}) = \mathrm{Sp}(A^{0}) = \mathrm{Sp}(A)$, где Sp — след матрицы.

12. $\mathrm{rang}(A^T) = \mathrm{rang}(A^{\perp}) = \mathrm{rang}(A^{|}) = \mathrm{rang}(A^{-1}) = \mathrm{rang}(A^{0}) = \mathrm{rang}(A)$, где $\mathrm{rang}(A)$ — ранг матрицы A.

13. Пусть A — квадратная матрица, Δ_i, Δ_i^T, $\Delta_i^{\perp}$, Δ_i^{0}, ($\overline{\Delta}_i$, $\overline{\Delta}_i^T$, $\overline{\Delta}_i^{\perp}\overline{\Delta}_i^{0}$), $i = 1, 2, \ldots, n$, — главные миноры (соответствующие им дополнительные миноры) матрицы A, A^T, $A^{\perp}$, A^{0} соответственно. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\Delta_i = \overline{\Delta}_{n-i}^{0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad \Delta_n = \Delta_n^{0} = |A| = |A^{0}|;$$

$$\Delta_i^{0} = \overline{\Delta}_{n-i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\Delta_i = \Delta_i^T, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \Delta_n = \Delta_n^T = |A| = |A^T|;$$

$$\Delta_i = \overline{\Delta}_{n-i}^{\perp}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad \Delta_n = \Delta_n^{\perp} = |A| = |A^{\perp}|.$$

Справедливость этих равенств следует из определения транспонированных матриц, соотношений 7 и свойств детерминанта.

Структуры КМС и свойства симметрической матрицы. Рассмотрим квадратную $n \times n$-матрицу $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, описывающую некоторую линейную крупномасштабную систему.

Матрица A называется обобщенно симметрической, если для каждого ее элемента существует такой элемент, который симметричен относительно некоторой точки или элементов этой матрицы на прямой. Элементы матрицы, лежащие в этой точке или на прямой, считаются симметричными относительно самих себя.

Далее приведем описание всех видов симметрических матриц. Пусть матрица A отождествлена с некоторым квадратом, тогда:

a) левая (правая) диагональ квадрата называется главной (неглавной) диагональю матрицы A;

b) вертикальная (горизонтальная) ось симметрии квадрата называется вертикальной (горизонтальной) осью матрицы A;

c) центр симметрии квадрата будем называть центром матрицы A.

Квадратная $n \times n$ матрица A называется симметрической относительно:

1) главной диагонали, если $A^T = A$, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (обычная симметрическая матрица);

2) неглавной диагонали, если $A^{\perp} = A$, т. е. $a_{ij} = a_{n+1-j, n+1-i}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

3) вертикальной оси, если $A^{|} = A$, т. е. $a_{ij} = a_{i, n+1-j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

4) горизонтальной оси, если $A^{-} = A$, т. е. $a_{ij} = a_{n+1-i, j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

5) центра матрицы, если $A^0 = A$, т. е. $a_{ij} = a_{n+1-i, n+1-j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Отметим, что в главной и неглавной диагоналях имеются элементы матрицы A, а в вертикальной и горизонтальной осях при четном n не имеется элементов матрицы A, при нечетном n имеются элементы матрицы A. В центре матрицы при четном n не имеется, а при нечетном n имеется элемент $a_{(n+1)/2, (n+1)/2}$.

Единичная матрица E симметрична относительно главной и неглавной диагонали и центра матрицы.

КМС в R^n, составленная из n свободных подсистем, называется симметрической относительно:

a) свободных подсистем, если соответствующие связи и обратные связи одинаковы,

b) связей и обратных связей между уравновешивающимися парами свободных подсистем, если уравновешивающиеся подсистемы между собой и связи, кроме связей между уравновешивающимися подсистемами, с соответствующими обратными связями одинаковы.

c) центра КМС, если уравновешивающиеся подсистемы со своими парами и все связи с соответствующими обратными связями одинаковы.

Справедливы следующие утверждения о свойствах симметрической матрицы:

1. Матрица, симметрическая относительно главной и неглавной диагонали, является симметрической относительно центра.

2. Матрица, симметрическая относительно вертикальной и горизонтальной осей, является симметрической относительно центра матрицы.

3. Матрица, симметрическая относительно вертикальной (горизонтальной) оси, является особой матрицей.

4. Для каждой квадратичной матрицы A матрицы

$$S_1 = \frac{1}{2}(A + A^T), \qquad S_2 = \frac{1}{2}(A + A^{\perp}), \qquad S_3 = \frac{1}{2}(A + A^{|}),$$

$$S_4 = \frac{1}{2}(A + A^{-}), \qquad S_5 = \frac{1}{2}(A + A^{0})$$

являются симметрическими относительно главной диагонали, неглавной диагонали, вертикальной оси, горизонтальной оси и центра матрицы соответственно.

5. Если A — симметрическая матрица относительно главной (неглавной) диагонали, вертикальной (горизонтальной) оси, центра матрицы, то матрицы

$$A^i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \qquad \alpha A, \qquad T^* A T$$

также являются симметрическими относительно главной (неглавной) диагонали, вертикальной (горизонтальной) оси и центра матрицы соответственно, где T — произвольная неособенная квадратная матрица, $*$ — означает соответствующее транспонирование, α — действительное число.

6. Если неособенная квадратичная матрица A симметрическая относительно главной (неглавной) диагонали и центра матрицы, то A^{-1} также симметрическая относительно главной (неглавной) диагонали и центра матрицы соответственно.

7. Если квадратные матрицы A и B симметрические относительно центра матрицы, то AB и BA также являются симметрическими матрицами относительно центра матрицы.

8. Если квадратная матрица n-го порядка A симметрична относительно центра матрицы и Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — главные миноры матрицы A, $\overline{\Delta}_i$ — их соответствующие дополнительные миноры, то

$$\Delta_i = \overline{\Delta}_{n-i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

9. Если квадратная матрица A симметрична относительно центра матрицы, то условия

$$\overline{\Delta}_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad \Delta_n = |A| > 0 \tag{1}$$

необходимы и достаточны для положительной определенности матрицы A. Для отрицательной определенности матрицы A условия (1) принимают вид

$$(-1)^i \overline{\Delta}_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad (-1)^n = |A| > 0. \tag{2}$$

10. Если квадратная $n \times n$-матрица A симметрическая относительно:

а) главной диагонали;

б) неглавной диагонали;

в) вертикальной оси матрицы;

г) горизонтальной оси матрицы;

д) центра матрицы,

то ее можно разбить на блочные матрицы вида:

а) при $n = 2k$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^T & A_2 \end{pmatrix}$, при $n = 2k+1$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ B_1^T & a_2 & A_2 \end{pmatrix}$;

б) при $n = 2k$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ C_1^T & A_1^\perp \end{pmatrix}$, при $n = 2k+1$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & C_1 \\ a_2^T & a_{k+1,k+1} & a_1^T \\ C_1^T & a_2 & A_1^\perp \end{pmatrix}$;

в) при $n = 2k$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_1^{|} \\ A_2 & A_2^{|} \end{pmatrix}$, при $n = 2k+1$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & A_1^{|} \\ (a_1^T)^{|} & a_{k+1,k+1} & (a_2^T)^{|} \\ A_2 & a_2 & A_2^{|} \end{pmatrix}$;

г) при $n = 2k$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_1^- & B_1^- \end{pmatrix}$, при $n = 2k+1$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ A_1^- & a_2^- & B_1^- \end{pmatrix}$;

д) при $n = 2k$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^0 & A_1^0 \end{pmatrix}$, при $n = 2k+1$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_2 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & (a_1^T)^0 \\ B_1^0 & a_2^0 & A_1^0 \end{pmatrix}$

соответственно. Здесь все блочные матрицы квадратичные k-го порядка

$$a_1 = (a_{k+1,1}, a_{k+1,2}, \ldots, a_{k+1,k})^T,$$
$$a_2 = (a_{k+1,k+2}, a_{k+1,k+3}, \ldots, a_{k+1,n})^T.$$

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ n-го порядка называется кососимметрической (антисимметрической) относительно:

1) главной диагонали, если $A^T = -A$, т. е. $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;
2) неглавной диагонали, если $A^\perp = -A$, т. е. $a_{ij} = -a_{n+1-j,n+1-i}$, $i, j, = 1, 2, \ldots, n$;
3) вертикальной оси, если $A^{|} = -A$, т. е. $a_{ij} = -a_{i,n+1-j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;
4) горизонтальной оси, если $A^- = -A$, т. е. $a_{ij} = -a_{n+1-i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;
5) центра матрицы, если $A^0 = -A$, т. е. $a_{ij} = -a_{n+1-i,n+1-j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Из этого определения следует, что:

1. Для каждой квадратичной матрицы A матрица

$$\overline{S}_1 = \frac{1}{2}(A - A^T), \qquad \overline{S}_2 = \frac{1}{2}(A - A^\perp), \qquad \overline{S}_3 = \frac{1}{2}(A - A^{|}),$$
$$\overline{S}_4 = \frac{1}{2}(A - A^-), \qquad \overline{S}_5 = \frac{1}{2}(A - A^0)$$

есть кососимметрическая относительно главной диагонали, неглавной диагонали, вертикальной оси, горизонтальной оси и центра матрицы соответственно.

2. Если A — квадратичная матрица, то

$$A = S_1 + \overline{S}_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

является разложением данной матрицы A на сумму симметрической и кососимметрической матриц относительно главной диагонали, неглавной диагонали, вертикальной оси, горизонтальной оси и центра матрицы соответственно.

3. Если квадратичная матрица A кососимметрическая относительно:
а) главной диагонали;
б) неглавной диагонали;
в) вертикальной оси;
г) горизонтальной оси;
д) центра матрицы,
то ее можно разбить на блочные матрицы вида:

а) при $n = 2k$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1^T & A_2 \end{pmatrix}$, при $n = 2k+1$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ -a_1^T & -a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ -B_1^T & -a_2 & A_2 \end{pmatrix}$;

б) при $n = 2k$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ C_1^T & -A_1^{\perp} \end{pmatrix}$, при $n = 2k+1$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & C_1 \\ a_2^T & -a_{k+1,k+1} & -a_1^T \\ C_1^T & -a_2 & -A_1^{\perp} \end{pmatrix}$;

в) при $n = 2k$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & -A_1^{|} \\ A_2 & -A_2^{|} \end{pmatrix}$, при $n = 2k+1$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & -a_1 & -A_1^{|} \\ (a_1^T)^{|} & -a_{k+1,k+1} & -(a_2^T)^{|} \\ A_2 & -a_2 & -A_2^{|} \end{pmatrix}$;

г) при $n = 2k$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -A_1^{-} & -B_1^{-} \end{pmatrix}$, при $n = 2k+1$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & -a_1 & B_1 \\ -a_1^T & -a_{k+1,k+1} & -a_2^T \\ -A_1^{-} & -a_2^{-} & -B_1^{-} \end{pmatrix}$;

д) при $n = 2k$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1^0 & -A_1^0 \end{pmatrix}$, при $n = 2k+1$ $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_2 & B_1 \\ a_1^T & -a_{k+1,k+1} & -(a_1^T)^0 \\ -B_1^0 & -a_2^0 & -A_1^0 \end{pmatrix}$,

где все блочные матрицы квадратичные k-го порядка

$$a_1 = (a_{k+1,1}, a_{k+1,2}, \ldots, a_{k+1,k})^T, \qquad a_2 = (a_{k+1,k+2}, a_{k+1,k+3}, \ldots, a_{k+1,n})^T.$$

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ n-го порядка называется ортогональной относительно
1) главной диагонали, если $A^T = A^{-1}$;
2) неглавной диагонали, если $A^{\perp} = A^{-1}$;
3) вертикальной оси, если $A^{|} = A^{-1}$;
4) горизонтальной оси, если $A^{-} = A^{-1}$;
5) центра матрицы, если $A^0 = A^{-1}$.

Из этого определения следует, что если квадратные матрицы A и B ортогональны относительно главной (неглавной) диагонали, вертикальной (горизонтальной) оси и центра матрицы, то матрицы A^{-1} и AB также ортогональны относительно главной (неглавной) диагонали, вертикальной (горизонтальной) оси и центра матрицы соответственно.

В заключение отметим, что линейные крупномасштабные системы имеют широкие приложения в механике и других областях науки и технологий. Возможные идентификации структуры КМС на основе обобщенных транспонированных матриц упрощают проблему анализа устойчивости систем такого рода (см. [2]).

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1966. – 576 с.
2. *Martynyuk A. A., Miladzhanov V. G., Bekmuratov K. A.* Construction of hierarchical matrix Lyapunov function // Differen. Equat. and Dynam. Systems. – 1993. – **1**, No 1. – P. 3–21.

Андижанский университет, Республика Узбекистан
Поступило в редакцию 14.01.2009

R. V. Mullajonov

Generalized transposition of the matrices and structure of linear large-scale systems

We develop a notion of the transposition of matrices and apply this approach to the classification of large-scale linear systems.