Доповіді Національної академії наук України

11 • 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 517.43+517.5

Член-кореспондент НАН України **М. Л. Горбачук, В. М. Горбачук**

Умови існування обмежених, майже періодичних і періодичних розв'язків еліптичних рівнянь у банаховому просторі

Для деякого класу неоднорідних еліптичних рівнянь у банаховому просторі даються умови для існування єдиного обмеженого на всій дійсній осі, майже періодичного або періодичного розв'язку.

Розглядається рівняння вигляду

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^m y(t) = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де B — позитивний оператор у комплексному банаховому просторі $\mathfrak{B}$, $m \in \mathbb{N}$, $f(t)\colon \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ — неперервна вектор-функція. Даються умови на $f(t)$, які гарантують існування єдиного обмеженого, періодичного або майже періодичного розв'язку цього рівняння.

1. Нехай $\mathfrak{B}$ — банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, $E(\mathfrak{B})$, $L(\mathfrak{B})$ — множини всіх щільно визначених замкнених і, відповідно, неперервних лінійних операторів в $\mathfrak{B}$, I — одиничний оператор, $\mathcal{D}(\cdot)$, $\rho(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ — область визначення, резольвентна множина і спектр оператора.

Для оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ і числа $\alpha > 0$ покладемо

$$\mathfrak{B}_{\{\alpha\}}(A) = \left\{ x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n) \,\Big|\, \exists c = c(x) > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathbb{N}\colon \|A^k x\| \leqslant c\alpha^k k! \right\}.$$

Простір $\mathfrak{B}_{\{\alpha\}}(A)$ є банаховим відносно норми

$$\|x\|_{\mathfrak{B}_\alpha(A)} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^k x\|}{\alpha^k k!}.$$

Покладемо

$$\mathfrak{B}_+(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{\alpha\to 0} \mathfrak{B}_\alpha(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{B}_\alpha(A).$$

Зліченно-нормований простір $\mathfrak{B}_+(A)$ називається простором цілих векторів оператора A (див. [1, 2]). Якщо $A \in L(\mathfrak{B})$, то $\mathfrak{B}_+(A) = \mathfrak{B}$. Неважко навести приклад оператора A, для якого $\mathfrak{B}_+(A) = \{0\}$. Але якщо A генерує аналітичну C_0-півгрупу лінійних неперервних операторів у $\mathfrak{B}$, то, як показано в [2–4], має місце таке твердження.

Твердження 1. *Нехай A є генератором обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ у просторі $\mathfrak{B}$. Тоді $\overline{\mathfrak{B}_+(A)} = \mathfrak{B}$ і оператор-функція*

$$\exp(zA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k}{k!}$$

є цілою у просторі $\mathfrak{B}_+(A)$, сім'я $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ утворює однопараметричну C_0-групу обмежених операторів у $\mathfrak{B}_+(A)$, і якщо x належить до цього простору, то

$$\exp(tA)x = \begin{cases} e^{tA}x & \textit{при} \quad t \geqslant 0, \\ (e^{-tA})^{-1}x & \textit{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Нагадаємо [5], що сім'я лінійних неперервних операторів $U(t)$, $t \geqslant 0$, що діють у локально опуклому просторі X, називається C_0-півгрупою, якщо: 1) $\forall\, t,\, s \geqslant 0\colon U(t+s) = U(t)U(s)$; 2) $U(0) = I$; 3) $\forall\, x \in X\colon U(t)x \to x$ при $t \to 0$. Генератор A півгрупи $\{U(t)\}_{t\geqslant 0}$ задається рівністю

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{t}$$

на тих елементах $x \in X$, для яких ця границя існує, і однозначно визначається півгрупою $U(t)$, $t \geqslant 0$. Скрізь у подальшому півгрупу, що генерується оператором A, позначатимемо $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$. Півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ у просторі $\mathfrak{B}$ називається аналітичною з кутом аналітичності θ (див. [6]), якщо вона допускає продовження до аналітичної в секторі $\Sigma(\theta) = \{z \in \in \mathbb{C}\colon |\arg z| < \theta\}$ оператор-функції e^{zA}, сильно неперервної вздовж довільного променя в $\Sigma(\theta)$ з початком у нулі. Якщо ж для будь-якого $\psi \in (0, \theta)$

$$\exists\, M_\psi, \qquad \forall\, z \in \Sigma(\psi)\colon \qquad \|e^{zA}\| \leqslant M_\psi,$$

то півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ називається обмеженою аналітичною.

2. Перейдемо тепер до рівняння (1), де B — позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, тобто $B \in E(\mathfrak{B})$, $(-\infty, 0] \in \rho(B)$ і існує стала $M > 0$ така, що

$$\forall\, \lambda \geqslant 0\colon \qquad \|(B + \lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{1+\lambda}.$$

Згідно з [7, 8], у цьому випадку є визначеними дробові степені B^α, $0 < \alpha < 1$, оператора B, а оператор $A = -B^{1/2}$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ у просторі $\mathfrak{B}$ з від'ємним типом

$$\omega(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|e^{tA}\|}{t} = -\sqrt{s}(B),$$

де

$$0 < s(B) = \sup_{\lambda\in\sigma(B)} \operatorname{Re} \lambda.$$

Під розв'язком (класичним) рівняння (1) на $\mathbb{R}$ розумітимемо $2m$ разів неперервно диференційовну вектор-функцію $y(t)\colon \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ таку, що $y^{(2k)}(t) \in \mathcal{D}(B^{m-k})$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, вектор-функція $B^{m-k} y^{(2k)}(t)$ є неперервною в $\mathfrak{B}$ на $\mathbb{R}$, і $y(t)$ задовольняє (1).

Розглянемо спочатку однорідне рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^m y(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Теорема 1. *Вектор-функція* $y(t)\colon \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ *є розв'язком рівняння* (2) *тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(tA) f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k, \tag{3}$$

де $A = -B^{1/2}$, f_k, $g_k \in \mathfrak{B}_+(A)$. *Вектори* f_k *і* g_k $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ *однозначно визначаються за* $y(t)$.

Зауважимо, що випадок $m = 1$ розглянуто в [4].

Із твердження 1 і зображення (3) випливає

Наслідок 1. *Будь-який розв'язок рівняння* (2) *на* $\mathbb{R}$ *є цілою вектор-функцією із значеннями в* $\mathfrak{B}_+(A)$.

Якщо $B \in L(B)$, то кожний розв'язок рівняння (2) на $\mathbb{R}$ допускає продовження до цілої вектор-функції експоненціального типу в просторі $\mathfrak{B}$. У випадку необмеженого B рівняння (2) може, взагалі кажучи, не мати таких розв'язків. Але якщо оператор $A = -B^{1/2}$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу в $\mathfrak{B}$ з кутом аналітичності $\theta = \pi/2$ і виконується умова

$$\int_0^1 \ln\ln M(s)\, ds < \infty, \qquad \text{де} \qquad M(s) = \sup_{|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant s} \|(A - \lambda I)^{-1}\|$$

або простір $\mathfrak{B}$ гільбертів і B — нормальний оператор у ньому, то у рівняння (2) існують цілі розв'язки експоненціального типу і множина таких розв'язків є щільною в класі всіх розв'язків цього рівняння, а саме для будь-якого розв'язку $y(z)$ рівняння (2) знайдеться послідовність $y_n(z)$ його цілих розв'язків експоненціального типу така, що

$$\forall r > 0\colon \sup_{|z| \leqslant r} \|y(z) - y_n(z)\| \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty.$$

Прототипом простору розв'язків рівняння (2) на півосі $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ є простір гармонічних у смужці $[0,1] \times \mathbb{R}_+$ функцій $u(t, x)$, які задовольняють крайові умови $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$. Класичний принцип Фрагмена–Ліндельофа [9] для цього випадку стверджує, що якщо $u(t, x)$ росте при $t \to \infty$ повільніше за $e^{\pi t}$, то вона прямує до нуля при $t \to \infty$ як $e^{-\pi t}$. Виявляється, що такий принцип справджується і для розв'язків рівняння (2) на $\mathbb{R}_+$, а саме має місце така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $y(t)$ — *розв'язок рівняння* (2) *на* $\mathbb{R}_+$ *і для числа* $\gamma \in (0, \sqrt{s(B)})$ *існує стала* c_γ *така, що*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+\colon \qquad \|y(t)\| \leqslant c_\gamma e^{\gamma t}.$$

Тоді для довільного $\gamma' \in (0, \sqrt{s(B)})$

$$\exists\, c_{\gamma'}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+\colon \qquad \|y(t)\| \leqslant c_{\gamma'} e^{-\gamma' t}.$$

У випадку, коли простір $\mathfrak{B}$ *гільбертів і* B *— нормальний оператор у ньому, за* γ *і* γ' *можна взяти* $\sqrt{s(B)}$.

Із теорем 1, 2 випливає, що якщо для розв'язку $y(t)$ рівняння (2) на $\mathbb{R}$ виконується співвідношення

$$\forall\, \gamma \in (0, \sqrt{s(B)}), \qquad \exists\, c_\gamma > 0, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+\colon \qquad \|y(t)\| \leqslant c_\gamma e^{\gamma t},$$

тоді $y(t)$ допускає зображення

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(At) f_k, \qquad f_k \in \mathfrak{B}_+(A), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Якщо це співвідношення виконується при $t \in (-\infty, 0)$, то

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-At) g_k, \qquad g_k \in \mathfrak{B}_+(A), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси отримуємо таке твердження.

Теорема 3. *Нехай* $y(t)$ *— розв'язок рівняння* (2) *на* $\mathbb{R}$ *і для довільного* $\gamma \in (0, \sqrt{s(B)})$

$$\exists\, c_\gamma, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\colon \qquad \|y(t)\| \leqslant c_\gamma e^{\gamma |t|}.$$

Тоді $y(t) \equiv 0$. *У випадку, коли* B *— нормальний оператор у гільбертовому просторі, можлива також рівність* $\gamma = \sqrt{s(B)}$.

3. Тепер розглянемо неоднорідне рівняння (1).

Позначимо через $C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ множину всіх обмежених неперервних на $\mathbb{R}$ $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій. Будемо говорити, що вектор-функція $x(t)\colon \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ задовольняє умову неперервності Гельдера з показником $\alpha \in (0,1)$, якщо існує стала $L > 0$ така, що

$$\|x(t) - x(s)\| \leqslant L|t - s|^\alpha. \tag{4}$$

Клас усіх вектор-функцій $x(t)$ з $C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, що задовольняють умову (4), позначатимемо $C_b^\alpha(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Під узагальненим розв'язком рівняння (1) на $\mathbb{R}$ розумітимемо неперервну вектор-функцію $y(t)\colon \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$, для якої виконується інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \left(\frac{d^2}{dt^2} - B^* \right)^m \varphi(t), y(t) \right\rangle dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \varphi(t), f(t) \rangle\, dt,$$

де $\varphi(t)$ — довільна нескінченно диференційовна фінітна вектор-функція зі значеннями в $\mathcal{D}(B^{*m})$ така, що вектор-функція $B^{*m}\varphi(t)$ є неперервною, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — дія функціонала на відповідний елемент.

Теорема 4. *Якщо $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, то вектор-функція*

$$\frac{1}{2^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{A(|t-s_1|+|s_1-s_2|+\cdots+|s_{m-1}-s_m|)} A^{-m} f(s_m)\, ds_1 \cdots ds_m \qquad (5)$$

має такі властивості:

1) $y^{(k)}(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1)$, $y^{(2m-1)}(\cdot) \in C_b^{\alpha}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $\forall \alpha \in (0, 1)$;

2) $y(t)$ — узагальнений розв'язок рівняння (1).

Неважко показати, що включення $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ не є, взагалі кажучи, достатньою умовою для того, щоб вектор-функція (5) була класичним розв'язком рівняння (1) на $\mathbb{R}$. Проте має місце таке твердження.

Теорема 5. *Нехай $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ і для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ існують стала $\delta_t > 0$ і невід'ємна неперервна функція $h_t(s)\colon [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ така, що*

$$\|f(t) - f(s)\| \leqslant h_t(|t-s|)$$

і

$$\int\limits_0^{\delta_t} \frac{h_t(s)}{s}\, ds < \infty.$$

Тоді вектор-функція $y(t)$, визначена формулою (5), *є класичним розв'язком рівняння* (1) *на $\mathbb{R}$.*

Наслідок 2. *Якщо $f(\cdot) \in C_b^{\alpha}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ з деяким $\alpha \in (0, 1)$, то вектор-функція* (5) *є класичним розв'язком рівняння* (1) *на $\mathbb{R}$.*

Користуючись методами, розробленими в роботах [10, 11] для параболічних рівнянь у банаховому просторі, можна довести таку теорему.

Теорема 6. *За умови, що $f(\cdot) \in C_b^{\alpha}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $\alpha \in (0, 1)$, вектор-функція $y(t)$, що фігурує в* (5), *належить до $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^{2m+\alpha})) \bigcap C_b^{2m}(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^{\alpha}))$ і є класичним розв'язком рівняння* (1) *на $\mathbb{R}$.*

Нагадаємо, що неперервна вектор-функція $f(t)\colon \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ називається майже періодичною (за Бором), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує стала $L_\varepsilon > 0$ така, що кожний інтервал з $\mathbb{R}$, довжина якого не менша за L_ε, містить точку $\tau = \tau(\varepsilon)$ (ε-майже період) із властивістю

$$\forall t \in \mathbb{R}\colon \|f(t) - f(t+\tau)\| < \varepsilon.$$

Виходячи з теорем 1–5, прийдемо до основної теореми.

Теорема 7. *Нехай $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Тоді існує один і лише один обмежений узагальнений розв'язок $y(t)$ рівняння* (1) *на $\mathbb{R}$ і він зображується у вигляді* (5). *Якщо ж $f(\cdot) \in C_b^{\alpha}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $\alpha \in (0, 1)$, або $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^{\alpha})$, то цей розв'язок є класичним. У випадку, коли вектор-функція $f(t)$ є майже періодичною (періодичною), розв'язок також є майже періодичним (періодичним).*

Робота виконана за підтримки ДФФД України (проект Ф 28.1/017 та Ф 29.1/003).

1. *Goodman R.* Analytic and entire vectors for representations of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **143**. – P. 55–76.
2. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht: Kluwer, 1991. – 347 p.

3. *Gorbachuk M. L., Mokrousov Yu. G.* On density of some sets of infinitely differentiable vectors of a closed operator on a Banach space // Meth. Funct. Anal. Topology. – 2002. – **8**, No 1. – P. 23–29.
4. *Gorbachuk V. M.* On solutions of parabolic and elliptic type differential equations on $(-\infty, \infty)$ in a Banach space // Ibid. – 2008. – **14**, No 2. – P. 177–183.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.
6. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York: Springer, 1983. – 279 p.
7. *Komatsu H.* Fractional powers of operators // Pacif. J. Math. – 1966. – **19**, No 2. – P. 285–346.
8. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1967. – 464 с.
9. *Lax P. D.* A Phragmen–Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations // Communs. Pure and Appl. Math. – 1957. – **10**. – P. 361–389.
10. *Da Prato G., Grisvard P.* Sommes d'opérateurs non linéaires et équations differentielles opérationelles // J. Math. Pures Appl. – 1975. – **54**. – P. 305–387.
11. *Da Prato G., Grisvard P.* Equations d'évolution abstraites non linéaires de type parabolique // Ann. Mat. Pura ed Appl. IV. – 1979. – **120**. – P. 329–396.

Інститут математики НАН України, Київ
НТУ України "Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 03.04.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. L. Gorbachuk, V. M. Gorbachuk**

The conditions of existence of bounded, periodic, and almost periodic solutions to elliptic equations in a Banach space

For a certain class of inhomogeneous elliptic equations in a Banach space, the conditions for existence of a unique almost periodic or periodic solution bounded on the whole real axis are given.