УДК 517.58

Академік НАН України **З. Т. Назарчук, Я. П. Кулинич**

Деякі властивості ортогональних у крузі двовимірних поліномів

Встановлено нові властивості ортогональних у крузі поліномів двох змінних, які використано для знаходження власних функцій інтегральних операторів типу ньютонівського потенціалу. Отримані співвідношення є базовими для застосування методу ортогональних поліномів до розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь.

Серед численних підходів до розв'язання задач теорії пружності, аеро-, гідро-, електродинаміки особливе місце займають інтегральні рівняння типу ньютонівського потенціалу. Одним із методів, який дозволяє отримати розв'язки одновимірних інтегральних рівнянь цього класу в аналітичному вигляді, є метод ортогональних многочленів [1]. Однак розвиток цього методу на випадок двовимірних інтегральних рівнянь наштовхується на принципові трудноші математичного характеру, які обумовлені двома причинами: вибором системи ортогональних поліномів двох змінних та встановленням спектральних співвідношень для відповідних сингулярних операторів.

У даній роботі встановлено нові властивості системи ортонормованих у крузі поліномів двох змінних, які розглядаються як узагальнення системи відомих гармонійних поліномів. Ці властивості використано для знаходження спектральних співвідношень для деяких сингулярних інтегральних операторів.

Розглянемо систему поліномів двох змінних $x = \{x_1, x_2\}$ [2], яка у полярній системі координат $x_1 = r\cos\phi$, $x_2 = r\sin\phi$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} f_{nj}^{1,\beta}(x) &= h_{nj}^{\beta} r^{n-2j} P_j^{(\beta,n-2j)}(2r^2-1) u_{n-2j}^{(1)}(\phi), \qquad 0 \leqslant 2j \leqslant n, \\ f_{nj}^{2,\beta}(x) &= h_{nj}^{\beta} r^{n-2j} P_j^{(\beta,n-2j)}(2r^2-1) u_{n-2j}^{(2)}(\phi), \qquad 0 \leqslant 2j \leqslant n-1, \end{aligned} \tag{1}$$

де $h_{nj}^{\beta} = \sqrt{\dfrac{2(1+n+\beta)j!\Gamma(1-j+n+\beta)}{\pi(n-j)!\Gamma(1+j+\beta)}}$; $P_m^{(\beta,\alpha)}(x)$ — поліноми Якобі; $u_m^{(2)}(\phi) = \sin(m\phi)$; $u_m^{(1)}(\phi) = \theta_m\cos(m\phi)$; $\theta_0 = 1/\sqrt{2}$, $\theta_m = 1$ для $m > 0$.

Легко переконатися, що вирази (1) описують поліноми двох змінних степеня n, які ортонормовані в крузі одиничного радіуса $C = \{(x_1, x_2)\colon |x| \leqslant 1\}$ з вагою $w(\beta, x) = (1-|x|^2)^{\beta}$ відносно скалярного добутку $\langle f, g\rangle = \iint\limits_C w(\beta, y) f(y) \times g(y)\, ds_y$. Для кожного n задається $n+1$ поліномів, що утворюють базис у просторі ортогональних поліномів степеня n. Зауважимо, що цей простір може мати інші базиси. У цьому й полягає основна трудність при дослідженні поліномів багатьох змінних. Очевидно, що за умови $j = 0$ з (1) отримуємо гармонійні поліноми, ортогональні в одиничному крузі.

Нехай функція $f(x)$ визначена в крузі C та задовольняє умову

$$\iint\limits_C w(\beta, y) f^2(y)\, ds_y < \infty.$$

Тоді для цієї функції можна визначити коефіцієнти Фур'є за системою ортонормованих поліномів (1):

$$a_{nj}^{1,\beta} = \langle f_{nj}^{1,\beta}, f\rangle, \qquad a_{nj}^{2,\beta} = \langle f_{nj}^{2,\beta}, f\rangle.$$

У результаті кожній функції $f(x)$ ставиться у відповідність ряд Фур'є

$$f(x) \sim a_{00}^{1,\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{0\leqslant 2j\leqslant n-1} [a_{nj}^{1,\beta} f_{nj}^{1,\beta}(x) + a_{nj}^{2,\beta} f_{nj}^{2,\beta}(x)]. \tag{2}$$

Як і у випадку однієї змінної, поведінка ряду Фур'є (2) визначається властивостями функції $f(x)$. Наведена нижче лема, яка є наслідком теореми 7.6 із [2], формулює умови збіжності ряду Фур'є до функції $f(x)$.

Лема 1. *Якщо функція $f(x)$ неперервна в крузі C та має в ньому неперервні частинні похідні першого порядку, то за умови $\beta > -1$ її ряд Фур'є за системою ортонормованих поліномів* (1) *збігається рівномірно до неї для внутрішніх точок круга C.*

Розглянемо слабосингулярний інтегральний оператор

$$L_\mu(\beta; x)g = \iint\limits_C w(\beta, y)|x-y|^{2\mu} g(y)\, ds_y, \qquad -1<\mu<0, \qquad \beta > -1,$$

та доведемо важливе для дальшого викладу твердження.

Теорема 1. *Справедливі такі формули:*

$$L_\mu(\beta; x)\begin{Bmatrix} f_{nj}^{1,\beta} \\ f_{nj}^{2,\beta}\end{Bmatrix} = \delta_{jn\mu} h_{nj}^{\beta} r^{n-2j} \begin{Bmatrix} u_{n-2j}^{(1)}(\phi) \\ u_{n-2j}^{(2)}(\phi)\end{Bmatrix} {}_2F_1(n-j-\mu, -1-j-\beta-\mu; 1+n-2j; r^2), \tag{3}$$

де

$$\delta_{jn\mu} = -\sin(\pi\mu)\frac{(-1)^j\Gamma(\beta+j+1)\Gamma^2(\mu+1)\Gamma(n-j-\mu)}{j!(n-2j)!\Gamma(\beta+j+2+\mu)};$$

${}_2F_1(a, b; c; x)$ — *функція Гаусса.*

Для доведення теореми використаємо методику обчислення аналогічних інтегралів, викладену в роботі [3]. Розглянемо першу рівність і для зручності покладемо $J(r,\phi) = (L_\mu(x) f_{nj}^{1,\beta})/h_{nj}^{\beta}$. Перейшовши до полярної системи координат $y = \{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\}$, подамо $J(r,\phi)$ через повторний інтеграл за змінними ρ та φ. Маємо

$$J(r,\phi) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho^{m+1}(1-\rho^2)^{\beta} P_j^{(\beta,m)}(2\rho^2-1)[\rho^2 - 2\rho r\cos(\varphi-\phi) + r^2]^{\mu}\cos(m\varphi)\, d\varphi d\rho,$$

де $m = n-2j$.

Для обчислення внутрішнього інтеграла скористаємось інтегральним поданням приєднаної функції Лежандра $\mathrm{P}_\mu^{-m}(z)$ [4]

$$\mathrm{P}_\nu^m(z)\cos(m\phi) = \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{2\pi\Gamma(\nu+1)} \int\limits_0^{2\pi} \left[z + \sqrt{z^2-1}\cos(\varphi-\phi)\right]^{\nu} \cos m\varphi\, d\varphi,$$

де $\Gamma(x)$ — гамма-функція Ейлера; для вибору однозначної вітки функції $\mathrm{P}_{\mu}^{m}(z)$ проведено розріз вздовж дійсної осі від $-\infty$ до $+1$.

Опускаючи подальші тотожні перетворення, отримуємо

$$\int\limits_{0}^{2\pi}[\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\phi)+r^2]^{\mu}\cos(m\varphi)\,d\varphi=2\alpha_{m\mu}|\rho^2-r^2|^{\mu}\mathrm{P}_{\mu}^{-m}\left(\frac{\rho^2+r^2}{|\rho^2-r^2|}\right)\cos(m\phi),$$

де $\alpha_{m\mu}=(-1)^m\pi\Gamma(1+\mu)/\Gamma(1+\mu-m)$.

Таким чином, доходимо висновку, що

$$J(r,\phi)=2\alpha_{m\mu}\cos(m\phi)\int\limits_{0}^{1}\rho^{m+1}(1-\rho^2)^{\beta}|\rho^2-r^2|^{\mu}P_j^{(\beta,m)}(2\rho^2-1)\mathrm{P}_{\mu}^{-m}\left(\frac{\rho^2+r^2}{|\rho^2-r^2|}\right)d\rho.$$

Використання позначення $d=r^2$ та заміни змінної інтегрування за формулою $u=\rho^2$ дає

$$J(v,\phi)=\alpha_{m\mu}\cos(m\phi)\int\limits_{0}^{1}u^{m/2}(1-u)^{\beta}P_j^{(\beta,m)}(2u-1)|u-v|^{\mu}\mathrm{P}_{\mu}^{-m}\left(\frac{u+d}{|u-d|}\right)du.$$

Для обчислення цього інтеграла використаємо властивість згортки Мелліна двох функцій, яку описує рівність [5]

$$\int\limits_{0}^{\infty}f_1(u)f_2\left(\frac{z}{u}\right)\frac{du}{u}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}f_1^*(s)f_2^*(s)z^{-s}ds, \tag{4}$$

де $f_i^*(s)$ — трансформанта Мелліна функції $f_i(x)$; c — деяка дійсна константа. У нашому випадку

$$J(v,\phi)=\alpha_{m\mu}\cos(m\phi)\int\limits_{0}^{\infty}f_1(u)f_2\left(\frac{d}{u}\right)\frac{du}{u},$$

де

$$f_1(u)=\begin{cases}u^{\mu+\frac{m}{2}+1}(1-u)^{\beta}P_j^{(\beta,m)}(2u-1), & 0\leqslant u\leqslant 1,\\ 0, \quad u>1,\end{cases}$$

$$f_2(p)=|1-p|^{\mu}\mathrm{P}_{\mu}^{-m}\left(\frac{1+p}{|1-p|}\right).$$

Вирази для трансформант Мелліна функції $f_1(x)$ і $f_2(p)$ дають формули [5]

$$\begin{aligned}f_1^*(s)&=\frac{(-1)^j\Gamma(s+m/2+\mu+1)\Gamma(\beta+j+1)\Gamma(j+m/2-\mu-s)}{j!\Gamma(m/2-\mu-s)\Gamma(j+\beta+s+m/2+\mu+2)}, \quad \mathrm{Re}\,s>-\frac{1}{2}(2+m+2\mu);\\ f_2^*(s)&=\frac{\Gamma(m/2-\mu-s)\Gamma(1+\mu)\Gamma(m/2+s)}{\Gamma(s+m/2+\mu+1)\Gamma(m-\mu)\Gamma(1+m/2-s)}, \qquad -\frac{m}{2}<\mathrm{Re}\,s<\frac{m}{2}-\mu.\end{aligned} \tag{5}$$

Після підстановки (5) у (4) та подальшої заміни $s + m/2 = t$ матимемо

$$J(v,\phi) = \frac{\gamma_{jm\mu} v^{m/2}\cos m\phi}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(t)\Gamma(j+m-\mu+t)}{\Gamma(1+m+t)\Gamma(2+j+\beta+m-t)}d^{-t}dt,$$

де

$$\gamma_{jm\mu} = \frac{(-1)^j\Gamma(\beta+j+1)\Gamma(\mu+1)}{j!\Gamma(m-\mu)}\alpha_{m\mu}, \qquad 0 < c < m-\mu.$$

Очевидно, що остання нерівність виконується тільки за умови $m > \mu$. Враховуючи обмеження, накладені на параметр μ, доходимо висновку, що ця умова справедлива для всіх цілих невід'ємних чисел m.

Застосовуючи означення функції Мейєра $G_{22}^{11}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}a_1, & a_2\\ b_1, & b_2\end{matrix}\right)$ через інтеграл Мелліна–Барнса [5], отримуємо

$$J(r,\phi) = \gamma_{jm\mu} r^m \cos m\phi G_{22}^{11}\left(r^2\,\middle|\,\begin{matrix}1-j-m+\mu, & 2+j+\beta+m\\ 0, & -m\end{matrix}\right). \tag{6}$$

Беручи до уваги співвідношення між G-функціями Мейєра і гіпергеометричними функціями [5], рівність (6) запишемо у вигляді

$$J(r,\phi) = \frac{\gamma_{jm\mu}\Gamma(j+m-\mu)}{m!\Gamma(\beta+j+2+\mu)} r^m \cos m\phi\, {}_2F_1(j+m-\mu, -1-j-\beta-\mu; 1+m; r^2).$$

Звідси після елементарних перетворень отримуємо першу рівність у (3). Аналогічними міркуваннями доводимо і другу рівність у (3).

Розглянемо деякі наслідки з доведеної теореми.

Наслідок 1. *Для ортонормованих поліномів*

$$s_{nj}^1(r,\phi) = \nu_{nj} r^{n-2j} P_j^{(-1/2,n-2j)}(2r^2-1)u_{n-2j}^{(1)}(\phi), \qquad 0 \leqslant 2j \leqslant n,$$
$$s_{nj}^2(r,\phi) = \nu_{nj} r^{n-2j} P_j^{(-1/2,n-2j)}(2r^2-1)u_{n-2j}^{(2)}(\phi), \qquad 0 \leqslant 2j \leqslant n-1,$$

справедливі спектральні співвідношення

$$L_{-1/2}(-1/2; r,\phi)\begin{Bmatrix} s_{nj}^1\\ s_{nj}^2\end{Bmatrix} = \lambda_{n,j}\begin{Bmatrix} s_{nj}^1\\ s_{nj}^2\end{Bmatrix}, \tag{7}$$

де

$$\nu_{nj} = h_{nj}^{-1/2}, \qquad \lambda_{nj} = \frac{\pi\Gamma(j+1/2)\Gamma(-j+n+1/2)}{j!(n-j)!}.$$

Для доведення достатньо в (3) покласти $\mu = -1/2$, $\beta = -1/2$ та застосувати формулу [6]

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(a+1)_n}{n!}{}_2F_1\left(-n, n+a+b+1; a+1; \frac{1-x}{2}\right). \tag{8}$$

Наслідок 2. *Для ортонормованих поліномів*

$$v^1_{nj}(r,\phi) = \tau_{nj} r^{n-2j} P_j^{(1/2,n-2j)}(2r^2-1) u^{(1)}_{n-2j}(\phi), \qquad 0 \leqslant 2j \leqslant n,$$

$$v^2_{nj}(r,\phi) = \tau_{nj} r^{n-2j} P_j^{(1/2,n-2j)}(2r^2-1) u^{(2)}_{n-2j}(\phi), \qquad 0 \leqslant 2j \leqslant n-1,$$

справедливі спектральні співвідношення

$$\widetilde{L}_{-3/2}(r,\phi) \begin{Bmatrix} v^1_{nj} \\ v^2_{nj} \end{Bmatrix} = \gamma_{nj} \begin{Bmatrix} v^1_{nj} \\ v^2_{nj} \end{Bmatrix}, \tag{9}$$

де

$$\widetilde{L}_{-3/2}(x)g = f.p. \iint\limits_C w(1/2,y)|x-y|^{-3} g(y)\, ds_y;$$

$$\gamma_{nj} = -\frac{4\pi\Gamma(j+3/2)\Gamma(-j+n+3/2)}{j!(n-j)!}; \qquad \tau_{nj} = h^{1/2}_{nj}.$$

Тут f.p. означає, що інтеграл розглядається в сенсі скінченної частини за Адамаром.

Для доведення використаємо той факт, що [7]

$$\widetilde{L}_{-3/2}(x)g = \Delta_x L_{-1/2}(1/2,x)g,$$

де Δ_x — оператор Лапласа.

За доведеною теоремою

$$L_{-1/2}\left(\frac{1}{2};r,\phi\right) \begin{Bmatrix} v^1_{n,j} \\ v^2_{n,j} \end{Bmatrix} = \sigma_{nj}\tau_{nj} r^{n-2j} \begin{Bmatrix} u^{(1)}_{n-2j}(\phi) \\ u^{(2)}_{n-2j}(\phi) \end{Bmatrix} {}_2F_1\left(n-j+\frac{1}{2}, -1-j; 1+n-2j; r^2\right),$$

де

$$\sigma_{nj} = \frac{(-1)^j \pi\Gamma(3/2+j)\Gamma(n-j+1/2)}{j!(j+1)!(n-2j)!}.$$

Використовуючи формули диференціювання функцій Гаусса, отримуємо

$$\Delta_{(r,\phi)}\left(L_{-1/2}\left(\frac{1}{2};r,\phi\right)\begin{Bmatrix} v^1_{nj} \\ v^2_{nj} \end{Bmatrix}\right) =$$

$$= \chi_{nj} r^{n-2j} \begin{Bmatrix} u^{(1)}_{n-2j}(\phi) \\ u^{(2)}_{n-2j}(\phi) \end{Bmatrix} \left(j\,{}_2F_1\left(n-j+\frac{3}{2}, 1-j; 2+n-2j; r^2\right) - \right.$$

$$\left. - (1-j+n)\,{}_2F_1\left(n-j+\frac{3}{2}, -j; 2+n-2j; r^2\right)\right),$$

де

$$\chi_{nj} = \frac{2(1+j)(1-2j+2n)}{1-2j+n}\sigma_{nj}\tau_{nj}.$$

З урахуванням рекурентного співвідношення для функцій Гаусса [6]

$$(c-a-1)_2F_1(a,b;c;x) + a_2F_1(a+1,b;c;x) - (c-1)_2F_1(a,b;c-1;x)$$

маємо

$$\Delta_{(r,\phi)}\left(L_{-1/2}\left(\frac{1}{2};r,\phi\right)\begin{Bmatrix} v_{n,j}^1 \\ v_{n,j}^2 \end{Bmatrix}\right) =$$
$$= -(1-2j+n)\chi_{jn}r^{n-2j}{}_2F_1\left(n-j+\frac{3}{2},-j;1+n-2j;r^2\right)\begin{Bmatrix} u_{n-2j}^{(1)}(\phi) \\ u_{n-2j}^{(2)}(\phi) \end{Bmatrix}.$$

Тепер, беручи до уваги формулу (8), приходимо до рівності (9), що і потрібно було показати.

Отримані співвідношення (7) і (9) є базовими для застосування методу ортогональних поліномів до розв'язання інтегральних рівнянь $L_{-1/2}(x)g = f(x)$ і $\widetilde{L}_{-3/2}(x)g = f(x)$.

1. *Попов Г. Я.* Избранные труды. Т. 1. – Одесса: Изд.-полиграф. дом ВМВ, 2007. – 438 с.
2. *Yuan Xu.* Lecture notes on orthogonal polynomials of several variables // Inzell Lectures on Orthogonal Polynomials / Advances in the Theory of Special Functions and Orthogonal Polynomials / Ed. by W. zu Castell, F. Filbir, B. Forster. – Nova Science Publishers, 2004. – **2**. – P. 135–188.
3. *Назарчук З. Т., Кулинич Я. П.* Кубатурні формули для обчислення деякого класу сингулярних інтегралів // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 31–35.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – Москва: Наука, 1973. – 296 с.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. – Москва: Физматлит, 2003. – 688 с.
6. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – Москва: Мир, 1980. – 608 с.
7. *Назарчук З. Т., Кулинич Я. П.* Кубатурна формула інтерполяційного типу для обчислення деякого класу гіперсингулярних інтегралів // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 36–43.

Фізико-механічний інститут
ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Надійшло до редакції 13.04.2009

Academician of the NAS of Ukraine **Z. T. Nazarchuk, Ya. P. Kulynych**

Some properties of two-dimensional polynomials orthogonal on a disk

New properties of orthogonal polynomials in two variables in the disk are investigated. It is shown that such polynomials are the eigenfunctions of the integral operators in the form of the Newtonian potential. The proposed formulae allow one to develop the orthogonal polynomial technique for solving the two-dimensional singular integral equations.