УДК 517.5

Р. В. Подвысоцкий

Об одном неравенстве для внутренних радиусов неналегающих областей

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

Досліджено екстремальні задачі в теорії однолистих функцій. Підсилено добре відому нерівність для внутрішніх радіусів неперетинних областей.

Оценки различных функционалов, заданных на классах взаимно неналегающих областей, представляют известное классическое направление геометрической теории функций комплексного переменного (см. [1–14]), многие результаты которого получены благодаря решению соответствующих экстремальных задач. Одним из важных элементов исследования экстремальных задач является теория квадратичных дифференциалов. Полное описание глобальной структуры траекторий положительного квадратичного дифференциала на конечной римановой поверхности (см. [3]) дает основная структурная теорема Дженкинса.

Новые возможности для данной теории возникли благодаря методу кусочно-разделяющего преобразования, позволяющему при определенных условиях сводить задачи с большим числом неизвестных параметров к задачам с меньшим их числом. Это обстоятельство дало возможность решить ряд трудных задач (см. [5–12]). В последнее время возрос интерес к экстремальным задачам со свободными полюсами соответствующих квадратичных дифференциалов (см. [5–12]). Задачи такого типа рассматриваются в настоящей работе.

Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных и комплексных чисел соответственно. Как обычно, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — есть расширенная комплексная плоскость или сфера Римана.

Системой неналегающих областей (с. н. о.) называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \bigcap B_m = \varnothing$, $k \neq m$, k, $m = \overline{1,n}$. Произвольный набор точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, подчиненных условию

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \cdots < \arg a_n < 2\pi,$$

назовем n-лучевой системой точек.

Рассмотрим области

$$E_k = \{w\colon \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}, \qquad k = \overline{1,n}, \qquad E_{n+1} = E_1.$$

Пусть $\theta_k = \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $k = \overline{1,n}$, $\theta_{n+1} = \theta_1$. Ясно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k = 2$.

При $k=\overline{1,n}$ обозначим через $\xi=\pi(w)$ ту ветвь многозначной аналитической функции $\xi=-i(e^{-i\arg a_k}w)^{1/\theta_k}$, которая реализует однолистное и конформное отображение области E_k на правую полуплоскость $\operatorname{Re}\xi>0$. Для внутреннего радиуса произвольной области $B\subset\overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a\in B$ будем использовать обозначение $r(B,a)$ (см. [5–7]).

Результаты и доказательства. Рассмотрим задачу о максимуме функционала

$$J_n=\prod_{k=0}^{n} r(B_k,a_k), \tag{1}$$

где $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ — n-лучевая система точек на единичной окружности, $\{B_k\}_{k=0}^n$ — с. н. о., $a_0=0\in B_0$, $a_k\in B_k$, $k=\overline{1,n}$.

В работе [5] (теорема 4) была получена точная оценка J_n на указанном классе с. н. о. и систем точек A_n. В данной работе усиливается этот результат из [5].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Тогда для любой системы различных точек единичной окружности $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ и любой с. н. о. $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0\in B_0$, $a_k\in B_k$, $k=\overline{1,n}$, справедливо неравенство*

$$r(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}\theta_k\right]^{1/2}\frac{4^{1/n}(2n)^{3n/2}}{(n^2-1)^{n+1/n}}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2.$$

Знак равенства достигается тогда, когда точки a_k и области B_k являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-1)w^n+1}{w^2(w^n-1)^2}dw^2.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 существенно используются идеи доказательства теоремы 4 из работы [5] и свойства разделяющего преобразования (см. [5–7]). Повторяя рассуждения, приведенные в [10] при доказательстве теоремы 5.2.3, и учитывая вышеуказанные определения для наборов областей $\{E_k\}_{k=1}^n$, функций $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ и чисел $\{\theta_k\}_{k=1}^n$, получим неравенство для функционала (1)

$$J_n\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\theta_k\right)^{1/2}\left[\prod_{k=1}^{n}\Psi_1(\theta_k)\right]^{1/2}, \tag{2}$$

где $\Psi_1(x)=2^{x^2+6}x^{x^2+1}(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}$, $x\in(0,2]$. Равенство в неравенстве (2) достигается для с. н. о. $\{D_k\}_{k=0}^n$ и системы точек $\{d_k\}_{k=0}^n$ $d_0=0\in D_0$, $d_k\in D_k$, где d_k и D_k, $k=\overline{1,n}$, являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала $Q(w)dw^2=-\dfrac{(n^2-1)w^n+1}{w^2(w^{n-1})^2}dw^2$.

Аналогично [5] рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^{n}\Psi_1(\theta_k)\longrightarrow\max;\qquad \sum_{k=1}^{n}\theta_k=2.$$

Ясно, что необходимые условия экстремума имеют вид

$$\frac{\Psi_1'(\theta_k)}{\Psi_1(\theta_k)} = -\frac{\lambda}{\prod\limits_{k=1}^{n}\Psi_1(\theta_k)}, \qquad k = \overline{1,n} \tag{3}$$

(λ — фиксированное, вещественное число). Функция $\Phi_1(\theta) = \Psi_1'(\theta)/\Psi_1(\theta)$ убывает на промежутке $(0, t_0]$, $1{,}1 < t_0 < 1{,}3$, и возрастает на $[t_0, 2)$. По аналогии с работой [5] рассмотрим функцию $\Delta_1(\theta) = \Phi_1(\theta) - \Phi_1(2-\theta)$, $\theta \in (0,2)$. Несложные вычисления показывают, что функция $\Delta_1(\theta)$ положительна на множестве $(0,1)$. Обозначим $\theta_0 = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \theta_k$. Пусть $\theta_0 = \theta_{k_0}$, $1 \leqslant k_0 \leqslant n$, $k_0 \in \mathbb{N}$. Допустим, что $\theta_0 > 1$, тогда $\theta_k \leqslant 2 - \theta_0 < 1$ для всех $k = \overline{1,n}$, $k \neq k_0$. Следуя работе [5], получим соотношения

$$\Phi_1(\theta_0) = \Phi_1(2-(2-\theta_0)) < \Phi_1(2-\theta_0) \leqslant \Phi_1(\theta_k), \qquad k = \overline{1,n}, \qquad k \neq 0.$$

Последнее неравенство противоречит равенствам (3). Поэтому все $\theta_k \in (0,1)$, $k = \overline{1,n}$. Теперь рассмотрим вспомогательный функционал $\widetilde{J}_n = \Bigl(\prod\limits_{k=1}^{n}\theta_k\Bigr)^{-1/2} J_n$. Из неравенства (2) следует, что

$$\widetilde{J}_n = \left[\prod_{k=1}^{n}\Psi_1(\theta_k)\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Функция $\ln[\Psi_1(x)]$ выпукла вверх на промежутке $(0, t_0]$, $t_0 > 1$. Из свойств выпуклых функций получаем соотношения

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\Psi_1(\theta_k) \leqslant \ln\Psi_1\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) = \ln\Psi_1\left(\frac{2}{n}\right).$$

Тогда

$$\prod_{k=1}^{n}\Psi_1(\theta_k) \leqslant \left[\Psi_1\left(\frac{2}{n}\right)\right]^{n}.$$

Отсюда и из (4) приходим к выводу

$$\widetilde{J}_n \leqslant \left[\Psi_1\left(\frac{2}{n}\right)\right]^{n/2}.$$

Возвращаясь к исходному функционалу (1) получаем окончательное неравенство

$$J_n \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n}\theta_k\right]^{1/2}\left[\Psi_1\left(\frac{2}{n}\right)\right]^{n/2}.$$

Производя вычисления с учетом конкретного выражения функции Ψ_1, получаем неравенство теоремы 1. Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно.

Из теоремы 1 непосредственно получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *При условиях теоремы 1 справедливо неравенство*

$$\prod_{k=0}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\dfrac{4}{n^2}\right)^{1/n}}{\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n+1/n}} \left(\frac{1-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^2.$$

Знак равенства достигается при условиях теоремы 1.

Следствие 1 получено в [5].

Доказательство следствия 1 вытекает из неравенства $\prod\limits_{k=1}^{n} \theta_k \leqslant (2/n)^n$ и непосредственных вычислений. Метод доказательства теоремы 1 позволяет доказать следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in (0,1]$, $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ на единичной окружности и любой с. н. о. $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $0 \in B_0$, $B_k \in a_k$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство*

$$r^{\alpha}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \theta_k\right)^{1/2} 2^n \left(\frac{2}{n}\right)^{n/2} \frac{\left(\dfrac{4\alpha}{n^2}\right)^{\alpha/n}}{\left(1-\dfrac{\alpha}{n^2}\right)^{n+\alpha/n}} \left(\frac{1-\dfrac{\sqrt{\alpha}}{n}}{1+\dfrac{\sqrt{\alpha}}{n}}\right)^{2\sqrt{\alpha}}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и области B_k являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\alpha)w^n + \alpha}{w^2(w-1)^2} dw^2.$$

Автор выражает искреннюю признательность А. К. Бахтину за постановку задач и руководство работой.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5.** – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
4. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – Москва: Наука, 1975. – 336 с.
5. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
6. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49(295)**, № 1. – С. 3–76.
7. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Учеб. пособие. – Владивосток: Изд. Дальневост. ун-та, 2003. – 116 с.
8. *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН Украины. – 2006. – № 10. – С. 7–13.
9. *Бахтин А. К.* Точные оценки для внутренних радиусов систем неналегающих областей и открытых множеств // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 12. – С. 1601–1618.
10. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **73**. – 308 с.

11. *Бахтин А. К.* Оценки функционалов для открытых множеств // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 2. – С. 147–153.
12. *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 5. – С. 1596–1610.
13. *Подвысоцкий Р. В.* Оценка произведения внутренних радиусов частично неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 7. – С. 1004–1008.
14. *Тамразов П. М.* Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 5. – С. 1033–1043.

Институт математики НАН Украины, Киев *Поступило в редакцию 09.04.2009*

R. V. Podvisotskij

About some inequality for inner radii of nonoverlapping domains

The strengthening of some well-known inequality for inner radii of nonoverlapping domains is given.