ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.45

С. П. Дегтярев

О мгновенном возникновении интерфейса и двусторонних его оценках в задаче Коши для нелинейного анизотропного параболического уравнения

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

Розглянуто явище миттєвої компактифікації носія розв'язку в задачі Коші для параболічного рівняння з анізотропним виродженням, подвійною нелінійністю та сильною абсорбцією. У термінах локальної поведінки інтегрованих початкових даних сформульовано необхідну та достатню умову присутності миттєвої компактифікації та одержано точні за порядком двосторонні оцінки розмірів носія розв'язку.

Постановка задачи и основной результат. В области $\mathbb{R}^N \times [0,T]$, N — размерность пространства $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, рассмотрим следующую задачу Коши для неизвестной функции $u(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\beta-1}u) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{\lambda-1}u = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T), \tag{1}$$

$$|u|^{\beta-1}u(x,0) = |u_0|^{\beta-1}u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

где N — размерность пространства $\mathbb{R}^N$, $\beta > 0$, $p_i > 0$, $i = \overline{1,N}$, $\lambda > 0$ — заданные постоянные, $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ — заданная начальная локально интегрируемая функция. Мы будем рассматривать случай медленной диффузии по всем направлениям и сильной абсорбции, что выражается в следующем ограничении на параметры задачи:

$$\beta > 0, \qquad p_i > 1 + \beta, \qquad i = \overline{1,N}, \qquad 0 < \lambda < \beta. \tag{3}$$

В случае изотропного уравнения, т. е. когда $p_i = p$, $i = \overline{1,N}$, известно, что при определенных условиях на начальную функцию $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ задача (1), (2) разрешима в слабом смысле и наблюдается явление мгновенной компактификации носителя (см. [1–10]). Суть этого явления состоит в том, что носитель решения становится компактным в любой сколь угодно малый момент времени $t > 0$ и сжимается при малых t, несмотря на то, что носитель начальной функции совпадает со всем $\mathbb{R}^N$. Не останавливаясь подробно на истории вопроса (см. [1–10]), отметим, что, в частности, в [10] в случае изотропного уравнения была получена точная по порядку двусторонняя оценка размера $D(t)$ носителя решения задачи (1), (2)

$$\psi_{Mt}^{-1}(\gamma_1 t^{\beta/(\beta-\lambda)}) \leqslant D(t) \leqslant (1+\varepsilon)\psi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-\lambda)}), \tag{4}$$

где

$$D(t) = \inf\{r\colon u(x,t) \equiv 0,\ |x| > r\},$$

ε, γ_0, γ_1, M — некоторые положительные постоянные и для $\rho > 0$

$$\psi_t(\rho) \equiv \sup_{|x_0|=\rho} \frac{1}{|B_{t^{\varkappa}}(x_0)|} \int\limits_{B_{t^{\varkappa}}(x_0)} |u_0(x)|^{\beta} dx \equiv \sup_{|x_0|=\rho} \fint\limits_{B_{t^{\varkappa}}(x_0)} |u_0|^{\beta} dx,$$

причем $\varkappa = (p-1-\lambda)/p(\beta-\lambda)$, $B_{t^{\varkappa}}$ — шар с центром в точке x_0 радиуса $t^{\varkappa}$ и при немонотонной $\psi_t(\rho)$

$$\psi_t^{-1}(s) = \inf_{\rho}\{\rho\colon \psi_t(k) < s, k > \rho\}.$$

Таким образом, было, в частности, показано, что мгновенная компактификация носителя имеет место тогда и только тогда, когда $\psi_t(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$.

Целью данной работы является выяснение условий наличия мгновенной компактификации носителя в случае анизотропного уравнения (1) и получение точных по порядку двусторонних оценок размеров носителя решения задачи (1), (2). При этом, как следует, например, из результатов работы [10], обращение решения в ноль в окрестности какой-либо точки пространства с течением малого времени определяется локальным поведением решения в окрестности этой точки. Поэтому следует ожидать, что оценка размеров носителя решения для анизотропного уравнения (1) в случае изотропного и однородного во всех направлениях поведения начальных данных на бесконечности также будет носить изотропный характер, аналогичный (4), несмотря на анизотропию уравнения. В случае же различного поведения начальных данных на бесконечности в различных направлениях размер носителя решения также будет зависеть от направления (см. замечание 1 после теоремы 1).

Чтобы сформулировать основной результат, нам понадобятся несколько определений и обозначений. Всюду ниже мы обозначаем

$$p = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}\right)^{-1} - \tag{5}$$

среднее гармоническое показателей p_i. Обозначим также

$$\begin{aligned} &d = p-1-\beta, \qquad d_\lambda = p-1-\lambda, \qquad d_i = p_i-1-\beta, \qquad d_{i\lambda} = p_i-1-\lambda, \\ &k = N(p-1-\beta)+\beta p = Nd+\beta p > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Под слабым решением задачи (1), (2) на интервале времени $[0,T]$ мы понимаем измеримую функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

1) для любой функции $\zeta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ отображение

$$t \in [0,T] \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1} u(x,t)\zeta(x)\,dx$$

непрерывно;

2) для любой финитной по x достаточно регулярной функции $\eta(x,t)$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1}u(x,t)\eta dx + \sum_{i=1}^N \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}\eta_{x_i} dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\lambda-1} u\eta dx d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{\beta-1}u_0(x)\eta(x,0)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1}u(x,t)\eta_\tau dx d\tau. \tag{7}$$

Отметим, что из результатов работ [11, 12] следует, что задача (1), (2) при заданном соотношении параметров (3) разрешима для локально интегрируемых начальных данных, не слишком быстро растущих на бесконечности, и при определенном ограничении на разброс значений показателей p_i. Поэтому, следуя [11, 12], мы предполагаем выполненным следующее ограничение на разброс показателей p_i:

$$p_i < \frac{p(N+\beta)}{N}. \tag{8}$$

Начальные же данные $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ мы предполагаем неотрицательными (а, следовательно, рассматриваем неотрицательные решения $u(x,t)$) и удовлетворяющими условию (ср. [11, 12]) для некоторого $r > 0$

$$|||u_0^\beta(x)||| \equiv \sup_{x_0\in\mathbb{R}^N} \sup_{\rho\geqslant r} \rho^{-k/d} \int\limits_{P_\rho(x_0)} u_0^\beta(x)\,dx < \infty, \tag{9}$$

где $P_\rho(x_0) = \{x\colon |x_i - x_{0i}| < \rho^{\alpha_i}\}$, $\alpha_i = pd_i/p_i d$ — параллелепипед с центром в точке x_0. Из результатов работ [11, 12] следует, что при этом условии для решения рассматриваемой задачи (1), (2) конечна такая же норма по переменной x, причем на некотором интервале времени $[0,T]$ справедлива оценка

$$|||u^\beta(x,t)||| \equiv \sup_{x_0\in\mathbb{R}^N} \sup_{\rho\geqslant r} \rho^{-k/d} \int\limits_{P_\rho(x_0)} u^\beta(x,t)\,dx \leqslant C|||u_0^\beta(x)|||, \tag{10}$$

где здесь и всюду ниже мы обозначаем через C, γ, b, ν все абсолютные константы либо константы, зависящие только от раз и навсегда зафиксированных параметров задачи.

Отметим, что, как можно проверить, условие (9) следует из необходимого условия мгновенной компактификации (16), приведенного ниже, поэтому на самом деле в рассматриваемой ситуации условие (9) не является ограничением. Отметим также, что, как и в работах [11, 12], в данной работе мы используем метод локальных интегральных оценок из [13–15].

Введем следующие показатели, являющиеся анизотропными аналогами изотропному случаю (ср. [10]):

$$\varkappa_i = \frac{p_i - 1 - \lambda}{p_i(\beta - \lambda)} = \frac{d_{i\lambda}}{p_i(\beta - \lambda)}, \qquad \varkappa = \frac{p - 1 - \lambda}{p(\beta - \lambda)} = \frac{d_\lambda}{p(\beta - \lambda)}, \tag{11}$$

и обозначим

$$P_{t^\varkappa} \equiv P_{t^\varkappa}(x_0) = \{x : |x_i - x_{0i}| \leqslant t^{\varkappa_i}\} \text{ —} \tag{12}$$

параллелепипед с центром в x_0 и со сторонами $2t^{\varkappa_i}$, заметив при этом, что объем данного параллелепипеда равен $|P_{t^\varkappa}| = Ct^{\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_N} = Ct^{N\varkappa}$. Пусть

$$\varphi_t(x_0) = \frac{1}{|P_{t^\varkappa}(x_0)|} \int\limits_{P_{t^\varkappa}(x_0)} u_0^\beta(x)\, dx \equiv \oint\limits_{P_{t^\varkappa}(x_0)} u_0^\beta(x)\, dx, \tag{13}$$

$$\varphi_t(\rho) = \sup_{|x_0| = \rho} \varphi_t(x_0), \tag{14}$$

$$\varphi_t^{-1}(s) = \inf_\rho \{\rho : \varphi_t(k) < s, k > \rho\}. \tag{15}$$

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. *Если начальная функция в* (2) *неотрицательна, то неотрицательное решение задачи* (1), (2) *обладает свойством мгновенной компактификации носителя тогда и только тогда, когда*

$$\varphi_t(\rho) \to 0, \qquad \rho \to \infty \tag{16}$$

при каком-либо $t > 0$ *(можно проверить, что при этом условие* (16) *выполнено при любом* $t > 0$*). Кроме того, для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют константы* $t_0 = t_0(\varepsilon)$, γ_0, γ_1, M, *зависящие от* $u_0(x)$, *такие, что на интервале времени* $(0, t_0]$ *справедливы следующие оценки сверху и снизу размеров носителя решения:*

$$D(t) \leqslant (1 + \varepsilon) \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\beta/(\beta - \lambda)}), \tag{17}$$

$$D(t) \geqslant \varphi_{Mt}^{-1}(\gamma_1 t^{\beta/(\beta - \lambda)}). \tag{18}$$

Замечание 1. Оценки размеров носителя (17), (18), несмотря на анизотропию уравнения (1), носят изотропный характер, что вызвано определением функции $\varphi_t(\rho)$, которое не учитывает возможное анизотропное поведение начальных данных. Непосредственно из доказательства теоремы 1 следует, что если определить для $\rho > 0$, $\omega \in S^{n-1} = \{x \colon |x| = 1\}$ функцию

$$\varphi_t(\rho, \omega) = \varphi_t(x_0), \qquad \rho = |x_0|, \qquad \omega = \frac{x_0}{|x_0|},$$

$$\varphi_t^{-1}(s, \omega) = \inf_\rho \{\rho : \varphi_t(k, \omega) < s, k > \rho\},$$

и определить функцию

$$D(t, \omega) = \inf\{\rho : u(r\omega, t) \equiv 0, r \geqslant \rho\},$$

то справедлива оценка

$$\varphi_{Mt}^{-1}(\gamma_1 t^{\beta/(\beta-\lambda)},\omega) \leqslant D(t,\omega) \leqslant C\varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-\lambda)},\omega), \tag{19}$$

т. е. размер носителя решения может быть различен в различных направлениях в зависимости от поведения начальной функции.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 состоит из трех основных этапов.

На первом этапе мы получаем условие на локальную энергию решения, при котором решение локально обращается в ноль, что сформулировано в нижеследующей лемме.

Лемма 1. *Пусть* $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0N}) \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$, $R \in (1,2)$, $\sigma \in (1/8, 7/8)$, $\rho_{2i} = Rt^{\varkappa_i}$, $\rho_{1i} = (1-\sigma)\rho_{2i}$, $\Delta\rho_i = \rho_{2i} - \rho_{1i}$, $i = \overline{1,N}$, $P_m = P_m(x_0) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \colon |x_i - x_{0i}| \leqslant \rho_{mi}, i = \overline{1,N}\}$, $m = 1,2$. *Тогда существует такая достаточно малая константа* $\gamma_2 = \gamma_2(R,\sigma)$, *что если*

$$Y(t/2, P_2) \equiv \sup_{t/2<\tau<t} \int\limits_{P_2} u^{1+\beta}(x,\tau)\,dx + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^t \int\limits_{P_2} |u_{x_i}|^{p_i} dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{P_2} u^{1+\lambda} dx d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_2 t^{(Nd_\lambda + p(1+\beta))/(p(\beta-\lambda))},$$

то $u(x,t) \equiv 0$ *на множестве* $P_1(x_0) \times [3t/4, t]$. *(Локальной энергией мы называем левую часть последнего неравенства.)*

На втором этапе, чтобы выразить условие локального обращения решения в ноль в терминах поведения массы решения, мы оцениваем локальную энергию решения через массу решения и, таким образом, получаем условие обращения решения в ноль в терминах оценок массы. А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* σ, ρ_{1i},ρ_{2i}, *параллелепипеды* P_1, P_2 *такие же, как в лемме 1. Пусть еще* $\rho_i = \rho_{2i}(1+\sigma)$, $i = \overline{1,N}$, $P_\rho = \{x \colon |x_i - x_{0i}| \leqslant \rho_i, i = \overline{1,N}\}$. *Существует такое* $\gamma_3 > 0$, *что условия леммы 1 выполнены, т. е.*

$$Y\left(\frac{t}{2}, P_1\right) \leqslant \gamma_2 t^{(Nd_\lambda + p(1+\beta))/(p(\beta-\lambda))}, \tag{20}$$

если

$$E(t/4, P_\rho) \equiv \sup_{t/4\leqslant\tau\leqslant t} \int\limits_{P_\rho} u^{\beta}(x,\tau)\,dx \leqslant \gamma_3 t^{\beta/(\beta-\lambda) + Nd_\lambda/(p(\beta-\lambda))} = \gamma_3 t^{\beta/(\beta-\lambda)+N\varkappa}. \tag{21}$$

Отметим, что из леммы 2 и леммы 1 следует, что при выполнении условия (21) решение $u(x,t)$ обращается в ноль в окрестности точки (x_0, t). Таким образом, следующей задачей является оценить локальную массу решения $E(t/4, P_\rho)$ через локальную массу начальной функции, и это составляет третий этап доказательства теоремы 1, что сформулировано в следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть $\sigma \in (0,1)$ зафиксировано, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, числа r, α_i — из соотношения (9), параллелепипед $P_{t^\varkappa}$ определен в (12). Существуют такие константы $t_0 = t_0(u_0)$, $\gamma_5 = \gamma_5(u_0)$, что для $t \leqslant t_0$, если при всех $y \in P_r = \{y\colon |y_i - x_{0i}| \leqslant r^{\alpha_i}(1+\sigma)^2\}$ выполнено*

$$\oint\limits_{P_{t^\varkappa}(y)} u_0^\beta(x)\,dx \equiv \frac{1}{|P_{t^\varkappa}(y)|}\int\limits_{P_{t^\varkappa}(y)} u_0^\beta(x)\,dx \leqslant \gamma_5 t^{\beta/(\beta-\lambda)}, \tag{22}$$

то выполнено

$$E_{t^\varkappa,x_0} \equiv \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\int\limits_{P_{t^\varkappa}(x_0)} u^\beta(x,\tau)\,dx \leqslant 2\int\limits_{P_{t^\varkappa(1+\sigma)}(x_0)} u_0^\beta(x)\,dx, \tag{23}$$

где $P_{t^\varkappa(1+\sigma)}(x_0) = \{x\colon |x_i - x_{0i}| \leqslant t^{\varkappa_i}(1+\sigma)\}$.

Доказательство теоремы 1 следует теперь из приведенных выше лемм. Покажем оценку (17). Зафиксируем какое-либо одно $\sigma \in (0,1)$ во всех оценках, данных в доказательстве теоремы 1. Тем самым оказываются зафиксированными все малые константы γ_i в леммах 1, 2 и 3. Пусть выполнено условие (16) и пусть γ_0 достаточно мало. Пусть, далее, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $|x_0| \geqslant \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-\lambda)}) + 2(1+\sigma)^2 \max r^{\alpha_i}$. Тогда, в силу определения функции φ_t^{-1}, для такого x_0 выполнены условия леммы 3, если γ_0 достаточно мало, $\gamma_0 \leqslant \gamma_5$. Но тогда, в силу леммы 3, для такого x_0 выполнены условия леммы 2 с $\rho_i = t^{\varkappa_i}(1+\sigma)$, если γ_0 достаточно мало. Но тогда выполнены условия леммы 1 и из этой леммы следует, что $u(x,\tau) \equiv 0$ на множестве $\{x\colon |x_i - x_{0i}| \leqslant t^{\varkappa_i}(1-\sigma), i = \overline{1,N}\} \times [3t/4, t]$. Таким образом, $u(x,\tau) \equiv 0$ на множестве $\{x\colon |x_0| \geqslant \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-\lambda)}) + 2(1+\sigma)^2 \max r^{\alpha_i}\}$, откуда следует оценка (17), так как, в силу (1.16), $\varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-\lambda)}) \to \infty$ при $t \to 0$.

Что же касается оценки (18) размеров носителя решения снизу, то ее доказательство полностью идентично доказательству соответствующей оценки снизу для изотропного уравнения в работе [10] с использованием параллелепипеда $P_{t^\varkappa}$ вместо шара, поэтому мы отсылаем читателя к этой работе.

1. *Kersner R., Shishkov A.* Instantaneous shrinking of the support of energy solutions // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – **198**. – P. 729–750.
2. *Шишков А. Е.* Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка // Мат. сб. – 1999. – **190**, № 12. – С. 129–156.
3. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* The support shrinking properties for solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption terms // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. – 1995. – **6**, 4: 1. – P. 5–30.
4. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* Energy methods for the free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics. – Basel: Birkhäuser, 2002. – 334 p.
5. *Абдуллаев У. Г.* О мгновенном сжатии носителя решения нелинейного вырождающегося параболического уравнения // Мат. заметки. – 1998. – **63**, № 3. – С. 323–331.
6. *Abdullaev U. G.* Exact local estimates for the supports of solutions in problems for nonlinear parabolic equations // Mat. Sb. – 1995. – **186**, No 8. – P. 3–24.
7. *Ughi M.* Initial behavior of the free boundary for a porous media equation with strong absorption // Adv. Math. Sci. and Appl. Gakkotosho, Tokyo. – 2001. – **11**, No 1. – P. 333–345.
8. *Kalashnikov A. S.* On the dependence of properties of solutions of parabolic equations in unbounded domains on the behavior of the coefficients at infinity // Math. USSR Sb. – 1986. – **53**. – P. 399–410.
9. *Kalashnikov A. S.* On the behavior of solutions of the Cauchy problem for parabolic systems with nonlinear dissipation near the initial hyperplane // Trudy Sem. Petrovsk. – 1992. – **16**. – P. 106–117.

10. *Дегтярев С. П.* Об условиях мгновенной компактификации носителя решения и о точных оценках носителя в задаче Коши для параболического уравнения с двойной нелинейностью и абсорбцией // Мат. сб. – 2008. – **199**, № 4. – С. 37–64.
11. *Дегтярев С. П., Тедеев А. Ф.* L_1–L_∞ оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными // Там же. – 2007. – **198**, № 5. – С. 45–66.
12. *Дегтярев С. П., Тедеев А. Ф.* Оценки решения задачи Коши с растущими начальными данными для параболического уравнения с анизотропным вырождением и двойной нелинейностью // Докл. АН. – 2007. – **417**, № 2. – С. 156–159.
13. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Adv. Different. Equat. – 2005. – **10**, No 1. – P. 89–120.
14. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Finite speed of propagation for the thin film equation and other higher order parabolic equations with general nonlinearity // Interfaces and Free Boundaries. – 2001. – **3**, No 3. – P. 233–264.
15. *Andreucci D., Tedeev A. F.* A Fujita type result for a degenerate Neumann problem in domains with non compact boundary // J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – **231**. – P. 543–567.

*Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк*

Поступило в редакцию 16.06.2008

S. P. Degtyarev

On the instantaneous interface rising and its bilateral estimates for the Cauchy problem for a nonlinear anisotropic parabolic equation

We study the instantaneous support shrinking phenomenon in a Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation with anisotropic degeneration and with strong absorption. In terms of the local behavior of locally integrable initial data, we formulate the necessary and sufficient condition for the instantaneous support shrinking phenomenon to take place and, in the same terms, establish the bilateral estimates of the solution support size which are sharp with respect to order.