УДК 531.36

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Мартынюк**

Критерий равномерной устойчивости в целом неавтономной системы

Формулюється критерій рівномірної неасимптотичної стійкості в цілому неавтономної системи і вказується спосіб побудови функції Ляпунова для класу лінійних неавтономних систем, що задовольняють цей критерій.

1. Наряду с классическим определением устойчивости в смысле Ляпунова применяются и другие определения динамических свойств механических систем. Одним из таких свойств является понятие устойчивости в целом (или устойчивости при любых начальных возмущениях). Это понятие было введено в работе [2] и широко применяется в контексте со свойством асимптотической устойчивости в целом нулевого решения автономной системы уравнений возмущенного движения (см. [1]). В работах [3, 9, 10] приведены условия асимптотической устойчивости в целом неавтономной системы общего вида.

Ниже формулируется критерий равномерной неасимптотической устойчивости в целом неавтономной системы и указан способ построения функции Ляпунова для класса линейных неавтономных систем, удовлетворяющих этому критерию.

В несколько другом виде этот критерий без доказательства сформулирован в виде теоремы 6 в работе [3], с. 40.

2. Постановка задачи. Рассматривается система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad f(t,0) = 0, \tag{1}$$

где $t \in R_+$, $x(t) \in R^n$, $f \in C(R_+ \times R^n, R^n)$. Пусть f — достаточно гладкая вектор-функция и решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) существует и единственно при любых $(t_0, x_0) \in R_+ \times S(p)$, $S(p) = \{x \in R^n \colon \|x\| < p\}$, $0 < p < +\infty$. Так как $f(t,0) = 0$, то система (1) допускает нулевое решение $x(t) = 0$. Предполагается, что система (1) не имеет иных состояний равновесия в R^n, кроме $x = 0$.

Далее понадобится определение устойчивости в целом состояния $x = 0$ системы (1).

Определение 1. Состояние $x = 0$ системы (1) равномерно устойчиво в целом, если при любом $0 < \varepsilon < +\infty$ существует $0 < \delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to \infty$, такое, что для любых $t_0 \in R_+$ и $x_0 \in R^n$, $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) определено при всех $t \geqslant t_0$ и $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при любом $t > t_0$.

3. Основные результаты. Основные результаты данной работы получены прямым методом Ляпунова и формулируются так.

Теорема 1. *Пусть вектор-функция f системы* (1) *непрерывна на $R_+ \times R^n$. Если существует радиально неограниченная убывающая положительно определенная в целом функция $V(t,x)$ такая, что $D^+V(t,x)|_{(1)} \leqslant 0$ при всех $(t,x) \in R_+ \times R^n$, то состояние $x = 0$ системы* (1) *равномерно устойчиво в целом.*

Теорема 2. *Если состояние $x = 0$ системы* (1) *равномерно устойчиво в целом, то существует функция $V(t,x)$ со свойствами, указанными в теореме* (1).

Доказательству этих теорем предпошлем одно вспомогательное утверждение.

Определение 2 [4]. Вещественная функция $\psi(r) \in KR$-классу, если она определена, непрерывна и строго возрастающая при $0 < r < \infty$ и если $\psi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$ и $\psi(0) = 0$.

Лемма 1. *Пусть* $x(t, t_0, x_0)$ *— решение системы* (1). *Нулевое решение системы* (1) *равномерно устойчиво в целом тогда и только тогда, когда существует функция сравнения* $b \in KR$*-классу такая, что* $\|x(t, t^*, t_0)\| \leqslant b(\|x_0\|)$ *при всех* $t \geqslant t^*$, *при любых* $t^* \geqslant t_0$ *и* $\|x(t^*)\| < p$, *где* $0 < p < +\infty$.

Доказательство. Достаточность условий леммы очевидна, если принять во внимание, что для функции $b \in KR$-классу $\lim b(\|x\|) \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$ и $\lim b(\|x\|) \to 0$ при $\|x\| \to 0$.

Остановимся на доказательстве необходимости условий леммы (1). Пусть нулевое решение системы (1) равномерно устойчиво в целом. Согласно определению 1, для заданного $\varepsilon (0 < \varepsilon < +\infty)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условий $t^* \geqslant t_0$, $\|x(t^*)\| \leqslant \delta$, $x(t^*) \in R^n$ следует оценка $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t^*$. Пусть $\delta_M = \delta_M(\varepsilon)$ $(\delta_m = \delta_m(\varepsilon))$ — точная верхняя (нижняя) грань значений $\delta(\varepsilon)$, для которых имеет место равномерная устойчивость в целом. Ясно, что если $t^* \geqslant t_0$ и $\|x(t^*)\| \leqslant \delta_M$ либо $\|x(t^*)\| \leqslant \delta_m$, то $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$ при всех $t \geqslant t^*$. Кроме того, для любого $\delta^* > \min(\delta_M, \delta_m)$ найдутся $\widehat{t} \geqslant t^*$ и $x(\widehat{t}) \in R^n$, $\|x(\widehat{t})\| < \delta^*$ такие, что $\|x(t)| \geqslant \varepsilon$ при некотором $t \geqslant \widehat{t}$. Функции $\delta_M(\varepsilon)$ и $\delta_m(\varepsilon)$ положительные неубывающие по ε и $\delta_M(\varepsilon) \to 0$, $\delta_m(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и $\delta_M(\varepsilon) \to \infty$, $\delta_m(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to \infty$, но они могут быть разрывными. Выберем положительную непрерывную и монотонно возрастающую функцию $\widehat{\delta}(\varepsilon)$ по формуле $\widehat{\delta}(\varepsilon) = \alpha\delta_M + (1 - \alpha)\delta_m$, $\alpha \in [0, 1]$. Ясно, что $\widehat{\delta}(\varepsilon) \leqslant \delta_M(\varepsilon)$ при малом $0 < \varepsilon < \infty$ и $\widehat{\delta}(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to \infty$. Далее при $0 < r < \infty$ выберем функцию сравнения $b(r) = \widehat{b}^{-1}(r)$. Для любых $x(t) \in R^n$ и $t^* \geqslant t_0$, $\|x(t^*)\| \leqslant \widehat{\delta}(\varepsilon)$ найдутся $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon < \infty$ такие, что при любом $t^* \geqslant t_0$ верна оценка $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon_1 = b(\|x(t^*)\|)$. Этим лемма 1 доказана.

Докажем теорему 1. Из условий теоремы следует, что существует функция $V(t, x)$ со свойствами:

а) $a(\|x\|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(\|x\|)$ при всех $(t, x) \in R_+ \times R^n$, где a, $b \in KR$-классу;

б) $V(t, x) \to +\infty$ при $\|x\| \to \infty$.

Пусть для заданого $0 < \varepsilon < +\infty$ величина $\delta(\varepsilon) > 0$ выбрана так, что $b(\delta) < a(\varepsilon)$. Пусть $t^* \geqslant t_0$ и $\|x(t^*)\| \leqslant \delta$. Так как функция $V(t, x)$ радиально неограниченная и невозрастающая по t, то для любого $t \geqslant t^*$ и $x(t^*) \in R^n$ получим $V(t, x(t)) \leqslant V(t^*, x(t^*)) \leqslant b(\|x(t^*)\|) \leqslant \leqslant b(\delta) < a(\varepsilon)$. Отсюда, учитывая, что функция $V(t, x)$ положительно определенная в целом (условие a), имеем $a(\|x(t)\|) < a(\varepsilon)$ при всех $t \geqslant t^*$. Из этого неравенства следует, что при любом $x(t^*) \in R^n$ $\|x(t^*)\| \leqslant \delta(\varepsilon)$, $t^* \geqslant t_0$ имеет место оценка $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t^*$. Следовательно, решение $x = 0$ системы (1) равномерно устойчиво в целом.

Докажем теорему 2. Выберем функцию $\psi \in KR$-классу и рассмотрим функцию

$$V(t, x) = \sup_{\tau \geqslant 0} \psi(\|x(t + \tau, t, x)\|),$$

где $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ — решение системы (1) при $(t_0, x_0) \in R_+ \times R^n$. Функция $V(t, x)$ определена и непрерывна при $(t, x) \in R_+ \times R^n$ и $V(t, 0) = 0$. Согласно лемме 1, имеем

$$\|x(t + \tau, t, x)\| \leqslant b(\|x\|), \qquad \tau \geqslant 0, \qquad b \in KR\text{-классу}.$$

Так как $\psi(b(\|x\|)) \in KR$-классу, то $V(t, x) \leqslant \psi(b(\|x\|)) = c(\|x\|)$, $c \in KR$-классу. Поэтому функция $V(t, x)$ убывающая в целом. Кроме того,

$$\sup_{\tau \geqslant 0} \psi(\|x(t + \tau, t, x)\|) \geqslant \psi(\|x(t, t, x)\|) = \psi(\|x\|).$$

Следовательно, функция $V(t,x)$ положительно определенная в целом и радиально неограниченная, так как $V(t,x)\to+\infty$ при $\|x\|\to+\infty$.

Из единственности решения системы (1) следует, что

$$x(t+\tau,t,x(t))=x(t+\tau,t_0,x_0)$$

и поэтому для значений $t_1>t_2$, $\sigma=t_1-t_2$ получим последовательность соотношений

$$V(t_1,x(t_1))=\sup_{\tau\geqslant0}\psi(\|x(t_1+\tau,t_1,x(t_1))\|)=\sup_{\tau\geqslant0}\psi(\|x(t_1+\tau,t_0,x_0)\|)=$$
$$=\sup_{\tau\geqslant0}\psi(\|x(t_2+\sigma+\tau,t_0,x_0)\|)=\sup_{\tau\geqslant\sigma}\psi(\|x(t_2+\tau,t_0,x_0)\|)\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{\tau\geqslant0}\psi(\|x(t_2+\tau,t_0,x_0)\|)=\sup_{\tau\geqslant0}\psi(\|x(t_2+\tau,t_2,x(t_2))\|)=V(t_2,x(t_2)).$$

Отсюда следует, что функция $V(t,x(t))$ является не возрастающей по t для любого решения $x(t)\in R^n$ системы (1), равномерно устойчивой в целом, т. е. $D^+V(t,x)|_{(1)}\leqslant0$ при всех $x\in R^n$.

Этим теорема 2 доказана.

4. Приложение. Рассмотрим движение двух неавтономно связанных осцилляторов

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=\gamma_1x_2+v\cos\omega ty_1-v\sin\omega ty_2,\\
\frac{dx_2}{dt}&=-\gamma_1x_1+v\sin\omega ty_1+v\cos\omega ty_2,\\
\frac{dy_1}{dt}&=\gamma_2y_2+v\cos\omega tx_1+v\sin\omega tx_2,\\
\frac{dy_2}{dt}&=-\gamma_2y_2+v\cos\omega tx_2-v\sin\omega tx_2,
\end{aligned}\tag{2}$$

где γ_1, γ_2, v, ω — некоторые константы и $\omega+\gamma_1-\gamma_2\neq0$.

Для независимых подсистем

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}=\gamma_1x_2, &&\frac{dx_2}{dt}=-\gamma_1x_1,\\
&\frac{dy_1}{dt}=\gamma_2y_2, &&\frac{dy_2}{dt}=-\gamma_2y_1,
\end{aligned}\tag{3}$$

вспомогательные функции v_{ij}, $i=1,2$, выберем в форме

$$\begin{aligned}
&v_{11}(x)=x^{\mathrm{T}}x, &&x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}};\\
&v_{22}(y)=y^{\mathrm{T}}y, &&y=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}\tag{4}$$

Построение внедиагонального элемента $v_{12}(x,y)$ матричнозначной функции $U(t,x,y)=$ $=[v_{ij}(t,\cdot)]$, i, $j=1,2$, в виде билинейной формы $v_{12}(t,x,y)=v_{21}(t,x,y)=x^{\mathrm{T}}P_{12}(t)y$ осуществляется на основе уравнения [8]

$$\frac{dP_{12}}{dt}+\begin{pmatrix}0&-\gamma_1\\\gamma_1&0\end{pmatrix}P_{12}+P_{12}\begin{pmatrix}0&\gamma_2\\-\gamma_2&0\end{pmatrix}+2v\begin{pmatrix}\cos\omega t&-\sin\omega t\\\sin\omega t&\cos\omega t\end{pmatrix}=0,\tag{5}$$

где $P_{12}(t) \in C^1(R_+, R^{2\times 2})$. Уравнению (5) удовлетворяет матрица

$$P_{12}(t) = -\frac{2v}{\omega + \gamma_1 - \gamma_2} \begin{pmatrix} \sin\omega t & \cos\omega t \\ -\cos\omega t & \sin\omega t \end{pmatrix}.$$

Матрица $P_{12}(t)$ является частным решением матричного уравнения (5), ограниченным при всех $t \in R_+$. Учитывая компоненты матричной функции (4), нетрудно проверить, что функция $V(t,x,y) = \eta^{\mathrm T} U(t,x,y)\eta$, $\eta = (1,1)^{\mathrm T}$, удовлетворяет оценкам

$$u_1^{\mathrm T} H^{\mathrm T} A H u_1 \leqslant V(t,x,y) \leqslant u_2^{\mathrm T} H^{\mathrm T} B H u_2. \tag{6}$$

Здесь $u_1^{\mathrm T} = (\|x\|, \|y\|)^{\mathrm T} = u_2^{\mathrm T}$, $H = \mathrm{diag}(\eta_1, \eta_2)$ и

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{11} = \beta_{11} = 1$, $\alpha_{22} = \beta_{22} = 1$, $\alpha_{12} = \beta_{21} = |2v|/|\omega + \gamma_1 - \gamma_2|$.

Для полной производной функции $V(t,x)$ имеем

$$D^+ V(t,x,y)\big|_{(2)} = 0 \tag{7}$$

при всех $(x,y) \in R^2 \times R^2$. Согласно теореме 1, условия равномерной устойчивости состояния $x = y = 0$ системы (2) находятся на основе анализа знакоопределенности матриц A и B. В данном случае матрицы A и B будут положительно определенными, если выполняется неравенство

$$1 - \frac{4v^2}{(\omega + \gamma_1 - \gamma_2)^2} > 0. \tag{8}$$

При этом функция $v(t,x,y)$ является положительно определенной и радиально неограниченной. Неравенства (6), (8) вместе с условием (7) удовлетворяют всем условиям теоремы 1 и состояние $x = y = 0$ системы (2) равномерно устойчиво, если

$$|v| < \frac{1}{2}|\omega + \gamma_1 - \gamma_2|.$$

5. Замечания. Известно, что конструктивное применение теорем прямого метода Ляпунова связано с успешным решением проблемы построения подходящей функции Ляпунова $V(t,x)$ для системы (1). Применение матричнозначных функций (см. [5–7]) позволяет упростить проблему построения подходящей функции Ляпунова, так как расширяет класс вспомогательных функций $v_{ij}(t,\cdot)$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, применяемых при этом.

В частности, любые функции $v_{ij}(t, x_i, x_j)$, $x_i \in R^{n_i}$, $x_j \in R^{n_j}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} n_i = n$, $v_{ij}(t,0,0) = 0$ при всех $t \in R_+$, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha_{ij}\varphi_{i1}(\|x_i\|)\varphi_{j1}(\|x_j\|) \leqslant v_{ij}(t, x_i, x_j) \leqslant \beta_{ij}\varphi_{i2}(\|x_i\|)\varphi_{j2}(\|x_j\|)$$

при всех $(x_i, x_j) \in R^{n_i} \times R^{n_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, где $\alpha_{ii} > 0$, $\beta_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, α_{ij}, β_{ij} — некоторые постоянные при $i \neq j$, φ_{i1}, φ_{j1}, φ_{i2}, $\varphi_{j2} \in KR$-классу, являются подходящими элементами матричнозначной функции $U(t,x)$, на основе которой может быть построена функция Ляпунова с заданными свойствами.

Результаты развития этого подхода изложены в работах [5–7], где имеются некоторые приложения.

1. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 223 с.
2. *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**, № 3. – С. 453–456.
3. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев: Наук. думка, 1984. – 307 с.
4. *Hahn W.* Stability of motion. – Berlin: Springer, 1967. – 446 p.
5. *Martynyuk A. A.* Stability by Liapunov's Matrix Function Method with Application. – New York: Marcel Dekker, 1998. – 276 p.
6. *Martynyuk A. A.* Qualitative methods in nonlinear dynamics. Novel approaches to Liapunov's matrix functions. – New York: Marcel Dekker, 2002. – 301 p.
7. *Martynyuk A. A.* Stability of motion. The role of multicomponent Liapunov's functions. – London: Cambridge Scientific Publ., 2007. – 322 p.
8. *Martynyuk A. A., Slyn'ko V. I.* Solution of the problem of constructing Lyapunov matrix function for a class of large scale systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2001. – **1**. – P. 193–203.
9. *Rama Mohana Rao M.* Ordinary differential equations. – New Dehli-Madras: Affiliated East-West Press, 1980. – 266 p.
10. *Yoshizawa T.* Stability theory by Liapunov's second method. – Tokyo: Mathematical Society of Japan, 1966. – 223 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 21.03.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Martynuyk**

A criterion of uniform stability of a nonautonomous system in general

We formulate the necessary and sufficient conditions for nonasymptotic stability of a nonautonomous system in general. We apply the theorem in the stability analysis of two coupled oscillators.