УДК 519.85

Т. Е. Романова, Е. А. Ступак, М. В. Злотник

Математическая модель и метод решения задачи оптимизации упаковки произвольных двумерных объектов в прямоугольных областях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)

Розглядається оптимізаційна задача розміщення неорієнтованих складених двовимірних об'єктів з нелінійною межею. Будується математична модель задачі. Пропонується стратегія розв'язання. Наводяться результати чисельних експериментів.

Пусть имеется прямоугольная область $P = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant y \leqslant h\}$ переменной длины l и объекты $T_i \subset R^2$, $i = 1, \ldots, n$, где R^2 — двумерное арифметическое эвклидово пространство, $T_i = \bigcup\limits_{s_i=1}^{S_i} T_{is_i}$, $T_{is_i} = \left(\bigcup\limits_{\wp_{s_i}=1}^{\Xi_{s_i}} T_{is_i\wp_{s_i}}\right) \bigcap \left(\bigcap\limits_{k_{s_i}}^{K_{s_i}} T^*_{is_ik_{s_i}}\right)$, $T^*_{is_ik_{s_i}} = \bigcup\limits_{m_{k_{s_i}}=1}^{M_{k_{s_i}}} T^*_{is_ik_{s_i}m_{k_{s_i}}}$, $T_{is_i\wp_{s_i}} \in \Im$, $T^*_{is_ik_{s_i}m_{k_{s_i}}} \in \Im^*$, $\mathrm{fr}\, A \bigcap B_{q_1} = \varnothing$, $B_{q_1} \bigcap B_{q_2} = \varnothing$, где $A = \bigcup\limits_{\wp_{s_i}=1}^{\Xi_{s_i}} T_{is_i\wp_{s_i}}$, и $B_q = T^*_{is_ik_{s_i}}$, $q = 1, \ldots, K_{s_i}$, $q_1 < q_2 = 2, \ldots, K_{s_i}$, $\Im$ — множество односвязных, а $\Im^*$ — множество двусвязных базовых объектов [1], $\Im = \{C, K, S\}$, $\Im^* = \{C^*, K^*, S^*\}$, где C, K, S — круг, многоугольник, круговой сегмент соответственно, $T^* = cl(R^2/T)$. Геометрическая информация о T_i задается кортежем вида

$$g_i = (c_i, m_i, u_i) = \left(\left\{\bigcup_{s_i=1}^{S_i}\Bigl(\bigcup_{\wp_{s_i}=1}^{\Xi_{s_i}} c_{is_i\wp_{s_i}}\Bigr)\bigcap\Bigl(\bigcap_{k_{s_i}=1}^{K_{s_i}}\bigcup_{m_{k_{s_i}}=1}^{M_{k_{s_i}}} c_{ik_{s_i}m_{k_{s_i}}}\Bigr)\right\},\right.$$

$$\left.\{(m_{s_i}, u_{s_i}),\ s = 1, \ldots, n_i\}, \qquad (v_i, \theta_i)\right),$$

где c_i — пространственная форма; m_i — метрические характеристики; $u_i = (v_i, \theta_i)$ — параметры размещения T_i; $v_i \in R^2$ — вектор трансляции; θ_i — угол поворота объекта T_i относительно центра собственной системы координат.

В дальнейшем $T_i(u_i) = T(v_i, \theta_i) \subset R^2$ — объект, транслированный на вектор v_i и повернутый на угол θ_i.

Задача. Разместить объекты T_i, $i = 1, \ldots, n$, в области P так, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathrm{int}\, T_i(u_i) \bigcap \mathrm{int}\, P^* = \varnothing, \quad \mathrm{int}\, T_i(u_i) \bigcap \mathrm{int}\, T_j(u_j) = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

и переменная l принимала минимальное значение.

В терминах Ф-функций [2] соотношения (1) описываются неравенствами $\Phi_i(0, u_i) \geqslant 0$, $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geqslant 0$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, где $\Phi_i(0, u_i)$ — Ф-функция $P^*(0)$ и $T_i(u_i)$, $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ — Ф-функция $T_i(u_i)$ и $T_j(u_j)$.

Ф-функция $\Phi_i(0,u_i)$ имеет вид

$$\Phi_i(0,u_i)=\min_{s_i=1,\dots,n_i}\max\{\min_{\wp_{s_i}=1,\dots,\Xi_{s_i}}\Phi_{\wp_{s_i}}(0,u_i+u_{\wp_{s_i}}),$$
$$\max_{k_{s_i}=1,\dots,K_{s_i}}\min_{m_{k_{s_i}}=1,\dots,M_{k_{s_i}}}\Phi_{m_{k_{s_i}}}(0,u_i+u_{m_{k_{s_i}}})\},\tag{2}$$

где $\Phi_{\wp_{s_i}}(0,u_i+u_{\wp_{s_i}})$ и $\Phi_{m_{k_{s_i}}}(0,u_i+u_{m_{k_{s_i}}})$ — Ф-функции для $P^*(0)$ и объектов $T_{is_i\wp_{s_i}}\in\in\Im$ и $T_{is_ik_{s_i}m_{k_{s_i}}}\in\Im^*$ соответственно. В [3, 4] приведены Ф-функции неориентированных базовых объектов.

Ф-функция $\Phi_{ij}(u_i,u_j)$ определяется следующим образом:

$$\Phi_{ij}(u_i,u_j)=\min_{s_i=1,\dots,n_i}\min_{s_j=1,\dots,n_j}\Phi_{s_is_j}(u_i+u_{s_i},u_j+u_{s_j}),\tag{3}$$

где $\Phi_{s_is_j}(u_i+u_{s_i},u_j+u_{s_j})$ — Ф-функция объектов T_{is_i} и T_{js_j},

$$\begin{aligned}\Phi_{s_is_j}(u_i+u_{s_i},u_j+u_{s_j})=\max\{&\min_{\wp_{s_i}=1,\dots,\Xi_{s_i}}\min_{\wp_{s_j}=1,\dots,\Xi_{s_j}}\Phi_{\wp_{s_i}\wp_{s_j}}(u_i+u_{\wp_{s_i}},u_j+u_{\wp_{s_j}}),\\ &\max_{k_{s_i}=1,\dots,K_{s_i}}\min_{k_{s_j}=1,\dots,K_{s_j}}\Phi_{k_{s_i}k_{s_j}}(u_i+u_{k_{s_i}},u_j+u_{k_{s_j}})\},\end{aligned}\tag{4}$$

$\Phi_{\wp_{s_i}\wp_{s_j}}(u_i+u_{\wp_{s_i}},u_j+u_{\wp_{s_j}})$ — Ф-функция объектов $T_{is_i\wp_{s_i}}\in\Im$ и $T_{js_j\wp_{s_j}}\in\Im$, $\Phi_{k_{s_i}k_{s_j}}(u_i+u_{k_{s_i}},u_j+u_{k_{s_j}})$ — Ф-функция объектов $T_{is_ik_{s_i}}$ и $T_{js_jk_{s_j}}$,

$$\Phi_{k_{s_i}k_{s_j}}(u_i+u_{k_{s_i}},u_j+u_{k_{s_j}})=\min_{m_{k_{s_i}}=1,\dots,L_{s_i}}\min_{m_{k_{s_j}}=1,\dots,L_{s_j}}\Phi_{m_{k_{s_i}}m_{k_{s_j}}}(u_i+u_{m_{k_{s_i}}},u_j+u_{m_{k_{s_j}}}),\tag{5}$$

$\Phi_{m_{k_{s_i}}m_{k_{s_j}}}(u_i+u_{m_{k_{s_i}}},u_j+u_{m_{k_{s_j}}})$ — Ф-функция объектов $T_{is_ik_{s_i}m_{k_{s_i}}}$, $T_{js_jk_{s_j}m_{k_{s_j}}}\in\Im^*$.

Подставляя (4), (5) в (3), Ф-функцию объектов $T_i(u_i)$ и $T_j(u_j)$ запишем

$$\Phi_{ij}(u_i,u_j)=\min_{s_i=1,\dots,n_i}\min_{s_j=1,\dots,n_j}\max\{\min_{\wp_{s_i}=1,\dots,\Xi_{s_i}}\min_{\wp_{s_j}=1,\dots,\Xi_{s_j}}\Phi_{\wp_{s_i}\wp_{s_j}}(u_i+u_{\wp_{s_i}},u_j+u_{\wp_{s_j}}),$$
$$\max_{k_{s_j}=1,\dots,K_{s_j}}\min_{\wp_{s_i}=1,\dots,\Xi_{s_i}}\min_{m_{k_{s_j}}=1,\dots,M_{k_{s_j}}}\Phi_{\wp_{s_i}m_{k_{s_j}}}(u_i+u_{\wp_{s_i}},u_j+u_{m_{k_{s_j}}}),$$
$$\max_{k_{s_i}=1,\dots,K_{s_i}}\min_{m_{k_{s_i}}=1,\dots,M_{k_{s_i}}}\min_{\wp_{s_j}=1,\dots,\Xi_{s_j}}\Phi_{m_{k_{s_i}}\wp_{s_j}}(u_i+u_{m_{k_{s_i}}},u_j+u_{\wp_{s_j}})\}.\tag{6}$$

Математическая модель поставленной задачи может быть представлена так:

$$\min_{X\in W\subset R^{3n+1}}F(X),\tag{7}$$

где $X=(u_1,u_2,\dots,u_n,l)$, $F(X)=l$,

$$W=\{X\in R^{3n}\mid\varphi_i(l,u_i)\geqslant 0,\ i=1,2,\dots,n,\ \Phi_{ij}(u_i,u_j)\geqslant 0,\ i<j=2,\dots,n\},$$
$$\Phi_i(0,u_i)|_{l\in R^1}=\varphi_i(l,u_i),$$

где $\Phi_i(0,u_i)$, $\Phi_{ij}(u_i,u_j)$ определяются соответственно (2), (6).

Рассмотрим основные особенности математической модели (7).

1. Задача (7) — нелинейная с линейной функцией цели.

2. Область допустимых решений W описывается $n(n-1)/2$ неравенствами вида $\Phi_{ij}(u_i,u_j) \geqslant 0$ и n неравенствами вида $\Phi_i(0,u_i) \geqslant 0$. Условие $\Phi_{ij}(u_i,u_j) \geqslant 0$ гарантирует непересечение объектов $T_i(u_i)$ и $T_j(u_j)$, $i<j=2,\ldots,n$. Условие $\varphi_i(l,u_i) \geqslant 0$ обеспечивает принадлежность объекта $T_i(u_i)$ области P, $i=1,\ldots,n$.

3. Область W может быть представлена в виде объединения множеств W_τ, $\tau=1,\ldots,\eta$:

$$W = \bigcup_{\tau=1}^{\eta} W_\tau,$$

где

$$\eta < \eta^* = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=n+1}^{n} \prod_{s_i=1}^{n_i} \prod_{s_j=1}^{n_j} \left(\prod_{\wp_{s_i}=1}^{\Xi_{s_i}} \prod_{\wp_{s_j}=1}^{\Xi_{s_j}} \xi + \prod_{\wp_{s_i}=1}^{\Xi_{s_i}} \wp_{s_i} K_{s_j} + K_{s_i} \right)\Bigg), \qquad \xi = \xi_1 + \xi_2,$$

здесь

$$\xi_1 = 2 \prod_{k=n_j^1+1}^{n_j^1+n_j^2} l_k^{n_j^1} 4^{n_i^1 n_j^3} \prod_{k=n_i^1+1}^{n_i^1+n_i^2} l_k^{n_i^1} \prod_{k=n_i^1+1}^{n_i^1+n_i^2} \prod_{m=n_j^1+1}^{n_j^1+n_j^2} (l_k + l_m) \prod_{k=n_i^1+1}^{n_i^1+n_i^2} \prod_{m=n_j^1+1}^{n_j^1+n_j^2} (l_k + l_m),$$

$$\xi_2 = 4 \cdot 4^{n_i^3 n_j^1} \prod_{k=n_i^1+1}^{n_i^1+n_i^2} \prod_{m=n_j^1+n_j^2+1}^{n_j} Q \prod_{m=n_i^1+n_i^2+1}^{n_i} \prod_{k=n_j^1+1}^{n_j^1+n_j^2} Q \prod_{k=n_i^1+n_i^2+1}^{n_i} \prod_{m=n_j^1+n_j^2+1}^{n_j} (9 - i_{km}^1),$$

$$Q = 2(3 - i_{km}^1 + l_k),$$

где W_τ описывается системой нелинейных неравенств; l — число вершин K, K^*; i^1 — число характерстических вершин S, S^*; n^1, n^2, n^3 — число базовых объектов C, K и S соответственно.

4. Задача (7) может быть сведена к задаче

$$\min\{F(X^\tau),\ \tau = 1,\ldots,\eta\},$$

где

$$F(X^\tau) = \min F(X), \qquad X \in W_\tau. \tag{8}$$

Задача (8) в общем случае является нелинейной и многоэкстремальной.

5. Локальные минимумы задачи (7) в общем случае — нестрогие.

6. Для задачи (7) всегда можно построить дерево решений, концевым вершинам которого соответствует система неравенств, описывающая множество W_τ, $\tau=1,\ldots,\eta$.

Исходя из особенностей 1–6, можно сделать следующие выводы:

область допустимых решений W — несвязна с многосвязными компонентами связности;

задача (7) является многоэкстремальной и NP-сложной;

глобальный минимум задачи (7) может быть найден теоретически.

В силу этого для решения задачи (7) предлагается стратегия [5, 6], позволяющая получать приближения к глобальному экстремуму.

Стратегия решения. Данная стратегия включает в себя: построение множества начальных точек, принадлежащих области допустимых решений W; поиск локальных минимумов; перебор локальных минимумов, который гарантирует приближение к глобальному минимуму.

Алгоритм, реализующий данную стратегию, состоит в следующем.

1. Аппроксимация области размещения P и составных объектов T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, многоугольниками P_i^*, $i = 0, 1, \ldots, n$, где P_i^* — объединение элементарных прямоугольников одинаковой ширины, чьи стороны параллельны осям координат фиксированной системе координат Oxy.

2. Поиск начальных точек $X^0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0, l^0) \in W$ методом оптимизации по группам переменных для P_i^*, $i = 1, \ldots, n$, и области P_0^* в соответствии с последовательностью объектов $(T_{i_1}, T_{i_2}, \ldots, T_{i_n})$, полученной методом сужающихся окрестностей [6].

3. Формирование множества $\Lambda = \{X^0 \in W\}$ [6].

4. Поиск точек локального минимума $X^{0*} = (u_1^{0*}, \ldots, u_n^{0*}, l^{0*}) \in W$ для каждой начальной точки $X^0 \in \Lambda$ модифицированным методом Зонтендейка [7]. Формирование множества $\Lambda^* = \{X^{0*}\}$.

5. Поиск приближения к глобальному минимуму: $X^* = \arg\min\limits_{X \in \Lambda^*} X$, $X^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*, l^*)$.

П р и м е р. Пусть $P = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant y \leqslant 15\}$, $n = 17$. Геометрическая информация об объектах T_i, $i = 1, \ldots, n$, задается следующим образом:

$$g_1 = (\{C_1 \bigcup C_2\}, \{(1; (1; 1)), (1; (2; 1))\}, (0; 0; 0)), \qquad n_1 = 3,$$

$$g_2 = (\{(K \bigcup S_1 \bigcup S_2) \bigcap (C_1^* \bigcup C_2^* \bigcup C_3^*)\}, \{((3{,}5; -0{,}5), (3{,}5; 2), (2{,}5; 3), (-2; 3), (-3; 2), (-3; 1), (2{,}5; -2)), (1; (3; 2), (2{,}5; 3), (0; 0; 0)), (1; (-2; 3), (-3; 2), (-2; 2; 0)), (0{,}5; (2{,}5; 0)), (0{,}5; (2{,}5; 2)), (0{,}5, (-2; 2))\}, (0; 0; 0)), \qquad n_2 = 3,$$

$$g_3 = (\{(K \bigcup C) \bigcap C^*\}, \{((3; -1{,}5), (-1; 1{,}5), (-1; -1{,}5), (0; 0; 0)), (1{,}5; (-1; 0)), (0{,}5; (-2; 2))\}, (0; 0; 0)), \qquad n_3 = 2,$$

$$g_4 = (\{K, ((3; -0{,}5), (3; 0{,}5), (-1; 0{,}5), (-1; -0{,}5), (-0{,}5; 0), (-0{,}5; 2{,}5), (-2; 2{,}5), (-2; 0)), (0; 0; 0)), \qquad n_4 = 1,$$

$$g_5 = (\{K, ((3; -2), (1; 2), (-2; 2), (-4; -2), (0; 0; 0)), \qquad n_5 = 1,$$

$$g_6 = (\{K \bigcup S\}, \{((1; -1), (-1; -1), (-1; 0), (1; 0), (0; 0; 0)), (1; (1; 0), (-1; 0), (0; 0; 0))\}, (0; 0; 0)), \quad n_6 = 3,$$

$$g_7 = (\{(\bigcup_{i=1}^{6} C_i) \bigcap (\bigcup_{j=1}^{6} C_j^*)\}, \{(5; (0; 0)), (2; (0; 5)), (2; (4,75; 1{,}55)), (2; (2{,}95; -4{,}05)), (2; (-2{,}95; -4{,}05)), (2; (-4{,}75; 1{,}55)), (3; (0; 0)), (1; (0; 5)), (1; (4{,}75; 1{,}55)), (1; (2{,}95; -4{,}05)), (1; (-2{,}95; -4{,}05)), (1; (-4{,}75; 1{,}55))\}, (0; 0; 0)), \qquad n_7 = 1,$$

$$g_8 = (\{C \bigcap C^*\}, \{(2; (0; 0)), (1; (0; 0))\}, (0; 0; 0)), \qquad n_8 = 2,$$

$$g_9 = (\{C \bigcap C^*\}, \{(5; (0; 0)), (3; (0; 0))\}, (0; 0; 0)), \qquad n_9 = 1, \qquad n = n_1 + n_2 + \cdots + n_9.$$

Согласно предложенной стратегии, на рис. 1–3 приведены размещения объектов T_i, $i = 1, \ldots, 17$, соответствующие начальной точке, локальному экстремуму, приближению к глобальному минимуму соответственно.

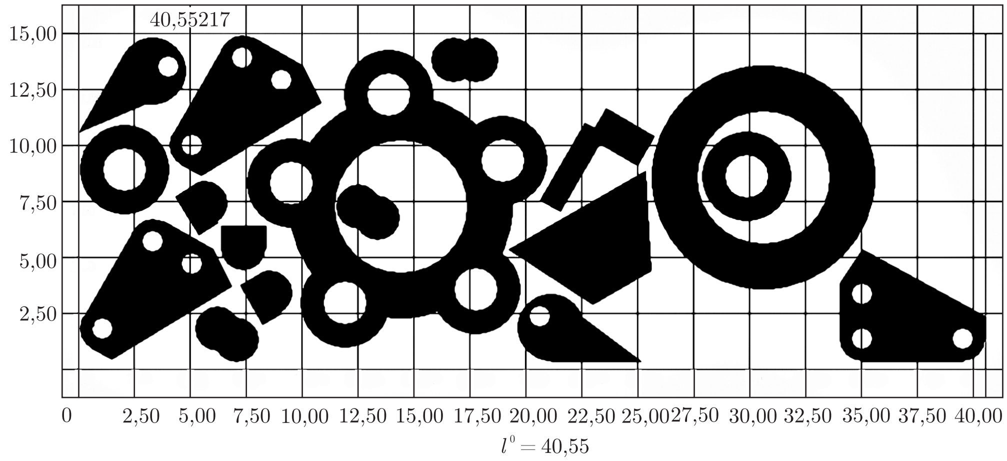

Рис. 1

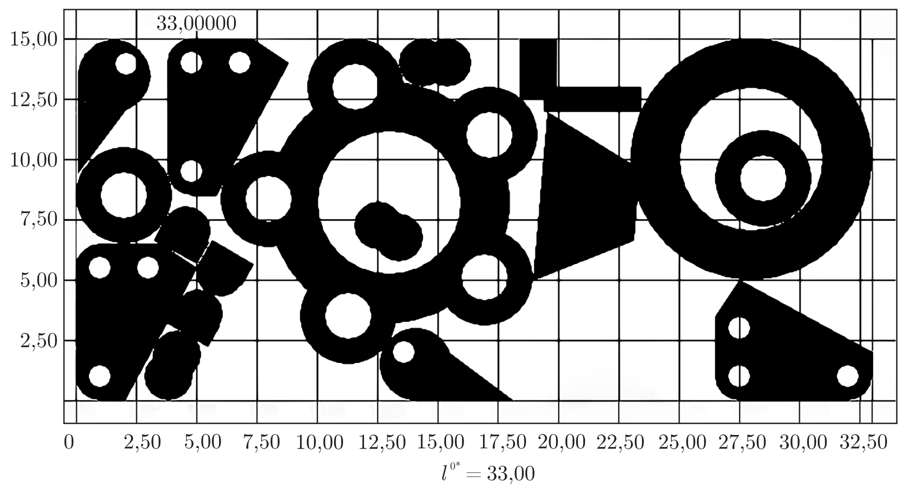

Рис. 2

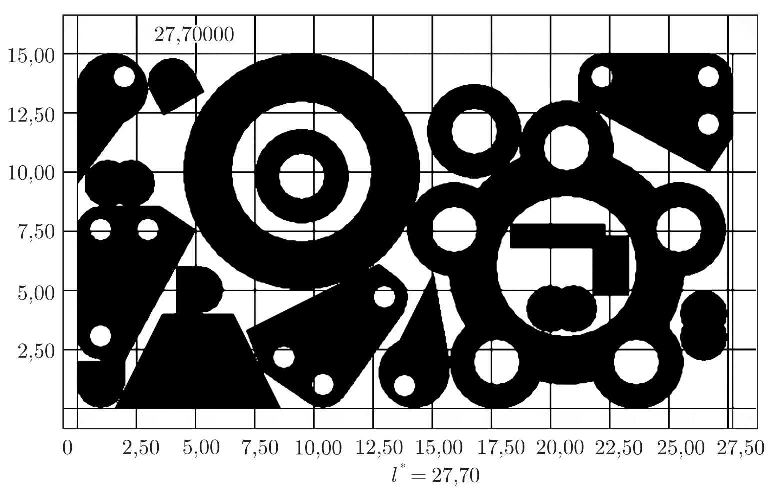

Рис. 3

1. *Stoyan Yu., Terno J., Scheithauer G. et al.* Φ-function for 2*D* primary objects // Studia Informatica. – 2002. – **2**, No 1. – P. 1–32.
2. *Stoyan Yu.* Φ-function and its basic properties // Доп. АН України. – 2001. – No 8. – С. 112–117.
3. *Злотник М. В.* Полный класс Φ-функций для кругов и прямоугольников с поворотами // Радиоэлектроника и информатика. – 2006. – № 1. – С. 36–40.
4. *Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T.* Mathematical modeling of interaction of a circular segment and primary objects // Proc. of the Workshop on Cutting Stock Problems – Sapientia University of Miercurea-Ciuc. – Romania, 2006. – P. 37–46.
5. *Стоян Ю. Г., Злотник М. В.* Размещение кругов и невыпуклых многоугольников с поворотами в прямоугольнике минимальной длины // Доп. НАН України. – 2007. – № 2. – С. 37–42.
6. *Стоян Ю. Г., Чугай А. М.* Оптимизация упаковки одинаковых кругов в многосвязную область // Там само. – 2004. – № 12. – С. 64–68.
7. *Зонтендейк Г.* Методы возможных направлений. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1963. – 176 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 02.07.2008

T. E. Romanova, E. A. Stupak, M. V. Zlotnik

A mathematical model and a method to solve the packing optimization problem for arbitrary 2D objects in rectangular domains

The article considers an optimization packing problem for nonoriented compound two-dimensional objects with nonlinear frontiers. We provide a mathematical model of the problem based on the Φ-function technique. A solution strategy is introduced and illustrated with an example.