ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2009

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 621.3(0758)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О коэффициенте затухания в сингуларисном разложении скачкообразного напряжения

Визначаеться коефіцієнт затухання у сингуларисному розкладанні стрибкуватих вхідних напружень електроланцюгів постійного та змінного струмів.

В работах [1, 2] представлено особое (сингуларисное) разложение скачкообразных напряжений в задачах по переходным процессам в электрических цепях. Такое разложение обусловлено эффектом автоматической реструктуризации электрических цепей с реактивными элементами при входных полигармонических сигналах [3]. В работах [4, 5] данное сингуларисное разложение используется с целью уточнения начального участка переходного процесса электрической цепи при скачкообразном входном напряжении. При этом указывается, что коэффициент затухания α в этом разложении значительно больше коэффициента затухания δ электрической цепи. И далее оговариваются условия, что если $\alpha = \infty$, то теория с сингуларисным разложением полностью совпадает с классической теорией расчета переходных процессов в электрических цепях. В связи с этим возникает вопрос: почему коэффициент затухания α сравнивается с величиной, равной бесконечности (∞), а не с другой? Я, как автор новой концепции о переходных процессах в электрических цепях [6, 7], полагаю, что ответ является очевидным. По-моему, он может быть следующим.

Сингуларисное разложение скачкообразного напряжения $U1(t)$, где $1(t)$ — единичная функция $1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0, \end{cases}$ t — время, имеет следующий вид [2]:

$$U1(t) = U(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t, \tag{1}$$

где $U = \text{const}$; $\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = U$; $U_{a1} = U/\pi$; $U_{ak} = U_{a1}/k$; $k = \omega_k/\omega_1$; ω_k, $k = \overline{1, n}$, — круговая частота k-й гармоники ($\omega_k = 2\pi f_k$, f_k — частота, Гц).

В выражении (1) n определяет максимальное число гармоник в сингуларисном разложении скачкообразной функции. Реально малые амплитуды U_{ak} при больших k слабо влияют на характер переходного процесса в электрической цепи. Поэтому так называемый хвост спектрального разложения скачкообразной функции в виде $m < n$-гармоник может быть не учтен. Тогда выражение (1) запишем так:

$$U1(t) = U(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{n-m} U_{ak} \cos \omega_k t. \tag{2}$$

Из (2) видно, что коэффициент затухания α можно определить с помощью дифференцирования (2) по t. Тогда имеем

$$\frac{dU1(t)}{dt} = U\frac{d1(t)}{dt} = U\delta(t) = U\alpha\ell^{-\alpha t} - \alpha\ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{n-m} U_{ak} \cos \omega_k t - \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{n-m} U_{ak} \sin \omega_k t, \tag{3}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция [8].

Примем в (3) аргумент $t = 0$. Тогда (3) имеет вид

$$U\delta(0) = U\alpha - \alpha \sum_{k=1}^{n-m} U_{ak} = \alpha U \left(1 - \sum_{k=1}^{n-m} \frac{1}{\pi k}\right),$$

откуда коэффициент затухания α определяется соотношением

$$\alpha = \frac{\delta(0)}{\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n-m} \dfrac{1}{\pi k}\right)}. \tag{4}$$

При $m = 0$, т. е. при учете всего спектра гармоник в сингуларисном разложении (1), $\alpha = \infty$. Кроме выражения (4), приведем еще соотношения относительно коэффициента α. Из (1) имеем

$$\ell^{\alpha t} = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t\right) - U}{U[1(t) - 1]},$$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{t} \ln \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t\right) - U}{U[1(t) - 1]} = \frac{1}{t}\left\{\ln\left[\left(\sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t\right) - U\right] - \ln U - \ln[1(t) - 1]\right\}. \tag{5}$$

Из выражения (5) при $t = 0$ $\alpha = \infty$, что соответствует формуле (4). Реально коэффициент затухания $\alpha \neq \infty$, но значительно больше коэффициента затухания δ электрической цепи. Реальный α создает условие возникновения медленно нарастающего начального участка в переходном процессе, например, тока в RL цепи при входном напряжении $U1(t)$. Величина этого участка $\Delta t \approx 4{,}6/\alpha$ небольшая, но физически существующая.

Кроме разложения (1), в работе [9] представлено особое разложение напряжения $U(t) = U_a \sin(\omega t \pm \varphi)$, имеющее скачок при $t = 0$, т. е. в этот момент $U(t) = U_a \sin\varphi$. Это особое разложение имеет вид

$$U(t) = U_a \sin(\omega t \pm \varphi) = U_a \sin(\omega t \pm \varphi)(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \sin\varphi \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos\omega_k t, \tag{6}$$

где $U_{a1} = (U_a \sin\varphi)/\pi$; $U_{ak} = U_{a1}/k$; $\omega_k = k\omega_1$; $\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = U_a$; α — коэффициент затухания; ω — круговая частота; φ — угол сдвига. При $\alpha = \infty$ выражение (6) приобретает первоначальный вид $U(t) = U_a \sin(\omega t \pm \varphi)$.

В разложении (6) коэффициент затухания α также значительно больше коэффициента затухания электрической цепи, к которой приложено напряжение (6). Определим его из (6) двумя способами, подобными тем, что применялись при определении коэффициента α для разложения (1).

Продифференцируем по времени выражение (6). В результате получим

$$\begin{gathered} U'(t) = U_a\omega \cos(\omega t \pm \varphi) = U_a\omega \cos(\omega t \pm \varphi)(1 - \ell^{-\alpha t}) + U_a \sin(\omega t \pm \varphi)\alpha\ell^{-\alpha t} - \\ - \alpha\ell^{-\alpha t} \sin\varphi \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos\omega_k t - \ell^{-\alpha t} \sin\varphi \sum_{k=1}^{n} \omega_k U_{ak} \sin\omega_k t. \end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим (7) при $t = 0$. Тогда

$$U'(0) = U_a\omega \cos(\pm\varphi) = \alpha U_a \sin(\pm\varphi) - \alpha \sin(\pm\varphi) \sum_{k=1}^{n} U_{ak}. \tag{8}$$

Из выражения (8)

$$\alpha = \frac{U_a\omega \operatorname{ctg}\varphi}{U_a - \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak}}. \tag{9}$$

При условии $\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = U_a$ из (9) следует, что коэффициент затухания $\alpha = \infty$. Если же, как и ранее, пренебречь спектральным хвостом в разложении (6) и принять число гармоник $n - m$, то

$$\alpha = \frac{U_a\omega \operatorname{ctg}\varphi}{U_a - \sum\limits_{k=1}^{n-m} U_{ak}}. \tag{10}$$

С учетом того, что $U_{a1} = U_a/\pi$, $U_a = U_{a1}/k$, $k = \omega_k/\omega_1$, (10) примет вид

$$\alpha = \frac{\omega \operatorname{ctg}\varphi}{1 - \sum\limits_{k=1}^{n-m} \dfrac{1}{\pi k}},$$

где знак угла φ включен внутрь φ.

В формуле при $m = 0$ коэффициент $\alpha = \infty$.

По второму способу коэффициент α из (6) определяется следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{t} \ln \frac{\sin\varphi \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos\omega_k t - U_a \sin(\omega t + \varphi)}{U_a \sin(\omega t + \varphi) - U_a \sin(\omega t + \varphi)}. \tag{11}$$

Из (11) также видно, что $\alpha = \infty$.

Таким образом, в результате приведенного вычисления определена формула для α и математически показано, что коэффициент затухания α близок к бесконечно большой величине.

1. *Божко А. Е.* Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Доп. НАН України. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
2. *Божко А. Е.* Аргументированная детализация новой концепции о переходных процессах в электрических цепях // Там само. – 2007. – № 6. – С. 81–87.
3. *Божко А. Е.* Об автоматической реструктуризации электрических цепей с реактивными элементами при полигармонических входных сигналах // Там само. – 2002. – № 11. – С. 84–86.
4. *Божко А. Е.* О некоторых особенностях в реализации дискретных оптимальных управлений колебательными системами // Там само. – 2007. – № 1. – С. 40–43.
5. *Божко А. Е.* Структурно-аналитическая интерпретация сигналов в системах фазового управления вентильных преобразователей // Там само. – 2007. – № 4. – С. 36–41.
6. *Божко А. Е.* К концепции о переходных процессах в электрических цепях // Там само. – 2003. – № 12. – С. 72–76.
7. *Божко А. Е.* Аргументация новой концепции о переходных процессах в электроцепях с позиций волновой механики // Там само. – 2006. – № 3. – С. 83–88.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 736 с.
9. *Божко А. Е.* О новой трактовке переходных процессов в электрических цепях переменного тока // Доп. НАН України. – 2005. – № 4. – С. 81–86.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 03.10.2007

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

On the damping coefficient of the singularisnal expansion of a jump-like voltage

The coefficient of damping in the singularisnal expansion of jump-like input voltages for direct and alternating current electric circuits is defined.