УДК 517.9

П. О. Касьянов

Про слабку розв'язність класу еволюційних варіаційних нерівностей в нескінченновимірних просторах

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Скопецьким)

Досліджено клас еволюційних варіаційних нерівностей з w_λ-псевдомонотонними відображеннями. Методом штрафу доведено слабку розв'язність для класу еволюційних варіаційних нерівностей з істотно нелінійними псевдомонотонними на W_1 багатозначними операторами. Одержано рівномірні апріорні оцінки в $L_1(S;V^*)$ на похідні наближених розв'язків.

Багато важливих прикладних задач зводяться до так званих задач з односторонніми граничними умовами або до варіаційних нерівностей, що породжують диференціально-операторні включення. Найпростішим прикладом подібного роду є така проблема [1–4]: в області Ω з границею Γ знайти розв'язок рівняння $\Delta y = f$ такий, що на Γ виконуються умови

$$u \geqslant 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0, \qquad u\frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Узагальнений розв'язок такої задачі задовольняє не інтегральну тотожність (як, наприклад, у задачі Діріхле), а деяку інтегральну нерівність, яку називають варіаційною нерівністю.

Новий розділ теорії рівнянь у частинних похідних — теорія варіаційних нерівностей, сформувався у 60-х роках минулого сторіччя. Джерелом для виникнення даної теорії стала задача із теорії пружності — задача Сіньйоріні, повністю вивчена в роботі Г. Фікери [5], в якій було закладено основи теорії варіаційних нерівностей. Потім дослідження варіаційних нерівностей було продовжено в роботах Ж.-Л. Ліонса [4], Г. Стампакк'ї [6] та їхніх учнів. Зокрема, розглядалася абстрактна постановка задач, що зводились до таких нерівностей.

У цій роботі досліджується питання розв'язності класу еволюційних варіаційних нерівностей з багатозначними W_λ-псевдомонотонними відображеннями. З огляду на застосування постає питання щодо розв'язності еволюційної варіаційної нерівності з оператором, який зображається у вигляді монотонного та демінеперервного оператора. Тим самим було б доречно одержати узагальнення відомих результатів, в яких умова обмеженості похідної в означенні псевдомонотонного оператора відсутня [4–15].

Постановка задачі. Нехай $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ та $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ — дійсні рефлексивні банахові простори, неперервно вкладені в дійсний гільбертів простір $(H, (\cdot,\cdot))$, такі, що для деякої зліченної множини $\Phi \subset V = V_1 \bigcap V_2$, Φ — щільна в просторах V, V_1, V_2 та в H. Після ототожнення $H \equiv H^*$ одержимо

$$V_1 \subset H \subset V_1^*, \qquad V_2 \subset H \subset V_2^*$$

з неперервними та щільними вкладеннями. Тут $(V_i^*, \|\cdot\|_{V_i^*})$ — топологічно спряжений простір до V_i відносно форми

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_i} \colon V_i^* \times V_i \to \mathbb{R},$$

яка збігається на $H \times V$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ в H.

Розглянемо функціональні простори $X_i = L_{r_i}(S;H) \bigcap L_{p_i}(S;V_i)$, $i = 1,2$, де $S = [0,T]$ — скінченний інтервал часу, $1 < p_i \leqslant r_i < +\infty$. Простори X_i є рефлексивними банаховими просторами з нормами

$$\|y\|_{X_i} = \|y\|_{L_{p_i}(S;V_i)} + \|y\|_{L_{r_i}(S;H)}.$$

Розглянемо також рефлексивний банахів простір $X = X_1 \bigcap X_2$ з нормою $\|y\|_X = \|y\|_{X_1} + \|y\|_{X_2}$. Нехай X_i^* — топологічно спряжений простір до X_i. Тоді

$$X^* = X_1^* + X_2^* = L_{q_1}(S;V_1^*) + L_{q_2}(S;V_2^*) + L_{r_1'}(S;H) + L_{r_2'}(S;H),$$

де ${r_i}^{-1} + {r_i'}^{-1} = {p_i}^{-1} + {q_i}^{-1} = 1$, $i = 1,2$. Визначимо спарювання на $X^* \times X$

$$\langle f, y\rangle = \int\limits_S (f_{11}(\tau), y(\tau))_H d\tau + \int\limits_S (f_{12}(\tau), y(\tau))_H d\tau + \int\limits_S \langle f_{21}(\tau), y(\tau)\rangle_{V_1} d\tau + \\ + \int\limits_S \langle f_{22}(\tau), y(\tau)\rangle_{V_2} d\tau = \int\limits_S (f(\tau), y(\tau))\, d\tau,$$

де $f = f_{11} + f_{12} + f_{21} + f_{22}$, $f_{1i} \in L_{r_i'}(S;H)$, $f_{2i} \in L_{q_i}(S;V_i^*)$, $i = 1,2$. Відзначимо, що $\langle\cdot,\cdot\rangle$ збігається зі скалярним добутком в $\mathcal{H} = L_2(S;H)$ на $\mathcal{H} \times X$.

Розглянемо нерефлексивний банахів простір $W_1 = \{y \in X | y' \in L_1(S;V^*)\}$ з нормою $\|u\|_{W_1} = \|u\|_X + \|u'\|_{L_1(S;V^*)}$, $u \in W_1$.Тут u' — похідна від елемента $u \in X$ у сенсі простору скалярних розподілів $\mathcal{D}^*(S;V^*) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(S);V_w^*)$, з $V = V_1 \cap V_2$; V_w^* збігається з $V^* = V_1^* + V_2^*$ з топологією $\sigma(V^*, V)$ [7].

Для строгого багатозначного відображення $A\colon X \rightrightarrows X^*$ визначимо верхню $[A(y), \omega]_+ = \sup\limits_{d \in A(y)} \langle d, w\rangle_X$ і нижню $[A(y), \omega]_- = \inf\limits_{d \in A(y)} \langle d, w\rangle_X$ опорні функції, де y, $\omega \in X$, а також верхню $\|A(y)\|_+ = \sup\limits_{d \in \mathcal{A}(y)} \|d\|_{X^*}$ і нижню $\|A(y)\|_- = \inf\limits_{d \in \mathcal{A}(y)} \|d\|_{X^*}$ норми [10, 11]. Позначимо через $C_v(X^*)$ сім'ю всіх непорожніх замкнених опуклих обмежених підмножин з простору X^*. Далі, $y_n \rightharpoonup y$ в X буде означати, що y_n слабко збігається до y в X.

Для багатозначних (у загальному випадку) відображень $A\colon X_1 \rightrightarrows X_1^*$, $B\colon X_2 \rightrightarrows X_2^*$, опуклої замкненої множини $K \subset X$ ($\overline{0} \in K$) та фіксованої функції $f \in X^*$ ставиться задача на пошук слабкого розв'язку еволюційної варіаційної нерівності:

$$\begin{cases} \langle w', w - y\rangle_X + [A(y), w - y]_+ + [B(y), w - y]_+ \geqslant \langle f, w - y\rangle_X \qquad \forall\, w \in K \bigcap W_2, \\ y \in K. \end{cases} \tag{1}$$

Основні результати. Уточнимо умови на параметри задачі (1), для якої доведемо слабку розв'язність. При доведенні використаємо метод штрафа [4]. Внаслідок теореми Асплунда можемо вважати, що простір V (разом із топологічно спряженим) є строго нормованим рефлексивним банаховим простором. Як оператор штрафа β та опуклу множину K розглянемо $\beta(y)(t) = \beta(y(t))$, $K = K(t)$ для майже всіх $t \in S$, де $\beta(v) = J(v - P_K v)$, $v \in V$ [4], $J\colon V \to V^*$ визначається так:

$$\|J(v)\|_{V^*}\|v\|_V = \langle J(v), v\rangle, \qquad \|J(v)\|_{V^*} = \|v\|_V^{p-1},$$

P_K — "ортогональний" проектор із строго нормованого простору V на замкнену опуклу множину K за нормою в V. Зауважимо, що $\beta(v) = 0 \Leftrightarrow v \in K$. Більше того, відображення $\beta\colon V \to V^*$ обмежене, монотонне, демінеперервне, а отже, $\beta\colon X \to X^*$ — λ-псевдомонотонне на X обмежене відображення [4, 15].

Означення 1. Строге багатозначне відображення $A\colon X \to C_v(X^*)$ називається:

$+$-коерцитивним, якщо існує дійсна функція $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ така, що $\gamma(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$ та $[A(y), y]_+ \geqslant \gamma(\|y\|_X)\|y\|_X$ $\forall\, y \in X$;

обмеженим, якщо $\forall\, L > 0$ $\exists\, l > 0$ таке, що $\|A(y)\|_+ \leqslant l$ $\forall\, y \in X$: $\|y\|_X \leqslant L$;

монотонним, якщо $[A(y_1) - A(y_2), y_1 - y_2]_+ \geqslant 0$ $\forall\, y_1,\, y_2 \in X$;

λ_0-псевдомонотонним на W_1, якщо для довільної $\{y_n\}_{n\geqslant 1} \subset W_1$, $y_0 \in X$ та деякого $C > 0$ таких, що $y_n \rightharpoonup y_0$ в X, $\forall\, n \geqslant 1$ $\|y_n'\|_{L_1(S;V^*)} \leqslant C$, $d_n \rightharpoonup d_0$ в X^*, де $d_n \in A(y_n)$ $\forall\, n \geqslant 1$, із нерівності

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \langle d_n, y_n - y_0\rangle_X \leqslant 0$$

випливає існування підпослідовності $\{y_{n_k}, d_{n_k}\}_{k\geqslant 1} \subset \{y_n, d_n\}_{n\geqslant 1}$ такої, що

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w\rangle_X \geqslant [A(y_0), y_0 - w]_- \qquad \forall\, w \in X.$$

Теорема 1. *Нехай виконані такі умови:*

а) оператор $A\colon X_1 \to C_v(X_1^*)$ обмежений, λ_0-псевдомонотонний на W_1 та $+$-коерцитивний;

б) оператор $B\colon X_2 \to C_v(X_2^*)$ обмежений, λ_0-псевдомонотонний на W_1 та $+$-коерцитивний;

в) $K \subset V$ — опукла замкнена множина, $\overline{0} \in V$, $\operatorname{int} K \neq \varnothing$.
Тоді, для довільного $f \in X^*$ існує розв'язок задачі (1).

Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо нове відображення

$$\mathcal{A}_\varepsilon(y) := A(y) + B(y) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(y), \qquad y \in X.$$

Лема 1. *Для довільного $\varepsilon > 0$ оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ обмежений, λ_0-псевдомонотонний на W_1 та коерцитивний, а задача*

$$\begin{cases} y_\varepsilon' + A(y_\varepsilon) + B(y_\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon}\beta(y_\varepsilon) \ni f, \\ y_\varepsilon(0) = \overline{0}, \qquad y_\varepsilon \in W_1, \end{cases}$$

має розв'язок y_ε такий, що

$$\|y_\varepsilon\|_X \leqslant c, \qquad \|A(y_\varepsilon)\|_+ \leqslant c, \qquad \|B(y_\varepsilon)\|_X \leqslant c, \qquad \|y_\varepsilon'\|_{L_1(S;V^*)} \leqslant c \qquad \forall\, \varepsilon > 0,$$

для деякого $c > 0$, яке не залежить від $\varepsilon > 0$.

Приклад. Розглянемо обмежену область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з достатньо гладкою межею $\partial\Omega$, $S = [0, T]$, $Q = \Omega \times (0; T)$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0; T)$. Нехай при $i = 1, 2$, $m_i \in \mathbb{N}$, N_1^i (відповідно, N_2^i) — число диференціювань за x порядку $\leqslant m_i - 1$ (відповідно, m_i) та $\{A_\alpha^i(x, t, \eta, \xi)\}_{|\alpha|\leqslant m_i}$ — сім'я дійсних функцій, означених на $Q \times R^{N_1^i} \times R^{N_2^i}$. Нехай

$$D^k u = \{D^\beta u, |\beta| = k\} \text{ — диференціювання за } x,$$

$$\delta_i u = \{u, Du, \ldots, D^{m_i-1}u\},$$

$$A^i_\alpha(x,t,\delta_i u, D^{m_i}v)\colon x,t \to A^i_\alpha(x,t,\delta_i u(x,t), D^{m_i}v(x,t)).$$

Розглянемо таку задачу на пошук невід'ємних розв'язків:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leqslant m_1}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A^1_\alpha(x,t,\delta_1 y(x,t), D^{m_1}y(x,t))) + \\ + \sum_{|\alpha|\leqslant m_2}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A^2_\alpha(x,t,\delta_2 y(x,t), D^{m_2}y(x,t))) \geqslant f(x,t) \text{ в } Q, \tag{2}$$

$$y(x,t)\Bigg(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leqslant m_1}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A^1_\alpha(x,t,\delta_1 y(x,t), D^{m_1}y(x,t))) + \\ + \sum_{|\alpha|\leqslant m_2}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A^2_\alpha(x,t,\delta_2 y(x,t), D^{m_2}y(x,t))) - f(x,t)\Bigg) = 0 \text{ в } Q, \tag{3}$$

$$y(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad Q, \qquad y(x,0) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{4}$$

$$D^\alpha y(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma_T \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant m_i \quad \text{та} \quad i = 1,2. \tag{5}$$

Припустимо, що $H = L_2(\Omega)$ та $V_i = W_0^{m_i,p_i}(\Omega)$ з $p_i \in (1,2]$: $V_i \subset H$ неперервно, $m_1 p_1 > n$.

Означення операторів $\boldsymbol{A_i}$. Нехай $A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi)$, означені в $Q \times R^{N_1^i} \times R^{N_2^i}$, задовольняють умови:

для майже всіх x, $t \in$ Q η, $\xi \to A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi)$ неперервна на $R^{N_1^i} \times R^{N_2^i}$;

для всіх η, ξ відображення x, $t \to A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi)$ вимірне на Q;

$$\forall\, u, v \in L^{p_i}(0,T;V_i) =: X_i \qquad A^i_\alpha(x,t,\delta_i u, D^{m_i}u) \in L^{q_i}(Q). \tag{6}$$

Тоді для всіх $u \in X_i$ відображення

$$w \to a_i(u,w) = \sum_{|\alpha|\leqslant m_i}\int_Q A^i_\alpha(x,t,\delta_i u, D^{m_i}u)D^\alpha w\,dxdt$$

неперервне на X_i і

$$\exists\, A_i(u) \in X_i^*\colon\ a_i(u,w) = \langle A_i(u), w\rangle. \tag{7}$$

Припустимо, що

$$\sum_{|\alpha|=m_i} A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi)\xi_\alpha \frac{1}{|\xi| + |\xi|^{p_i-1}} \to +\infty \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty \tag{8}$$

для майже всіх x, $t \in Q$ та обмежених $|\eta|$;

$$\sum_{|\alpha|=m_i}(A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi) - A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi^*))(\xi_\alpha - \xi^*_\alpha) > 0 \quad \text{при} \quad \xi \neq \xi^* \tag{9}$$

для майже всіх x, $t \in Q$ та $\forall\,\eta$.

Достатня умова коерцитивності:

$$\sum_{|\alpha|=m_i} A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi)\xi_\alpha \geqslant c|\xi|^{p_i} \quad \text{для великих} \quad |\xi|. \tag{10}$$

Достатні умови (6) (див. [8], с. 332):

$$|A^i_\alpha(x,t,\eta,\xi)| \leqslant c[|\eta|^{p_i-1} + |\xi|^{p_i-1} + k(x,t)], \qquad k \in L_{q_i}(Q). \tag{11}$$

Твердження 1. *Нехай оператор* $A_i\colon X_i \to X_i^*$ $(i = 1, 2)$, *визначений у* (7), *задовольняє* (6)–(11). *Тоді* A_i λ-*псевдомонотонний на* W_1, *коерцитивний та обмежений.*

Для майже всіх $t \in S$ покладемо

$$K = K(t) = \{v \in W_0^{m_1,p_1}(\Omega) \bigcap W_0^{m_2,p_2}(\Omega) | v(x) \geqslant 0 \text{ м.с. в } \Omega\}. \tag{12}$$

За перерахованих вище умов на A^i_α дану проблему перепишемо, як (1), де $f \in X^* = L_2(S; L_2(\Omega)) + L_{q_1}(S; W^{-m_1,q_1}(\Omega)) + L_{q_2}(S; W^{-m_2,q_2}(\Omega))$ $(p_i^{-1} + q_i^{-1} = 1)$. Елемент $y \in X$, що задовольняє (1), називається слабким розв'язком задачі (2)–(5).

Теорема 2. *За умов* (6)–(12), *задача* (2)–(5) *має слабкий розв'язок.*

1. *Толстоногов А. А., Уманский Я. И.* О решениях эволюционных включений // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 3, 4. – С. 145–174.
2. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. – Bucuresti: Editura Acad., 1976. – 346 p.
3. *Bresis H.* Problems unilateraux // J. Math. Pures et Appl. – 1972. – **51**. – P. 377–406.
4. *Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
5. *Fichera G.* Problemi elastostatici con vincoli unilateral: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno // Mem. Accad. Naz. Lincei. – 1964. – **8**, No 7. – P. 91–140.
6. *Stampacchia G.* Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1964. – **258**. – P. 4413–4416.
7. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 337 с.
8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 587 с.
9. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York: Springer, 1988. – 643 p.
10. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Неравенство Ки Фаня и операторные включения в банаховых пространствах // Кибернетика и систем. анализ. – 2002. – № 2. – С. 70–85.
11. *Мельник В. С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображениями класса // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1513–1523.
12. *Мельник В. С.* О критических точках некоторых классов многозначных отображений // Кибернетика и систем. анализ. – 1997. – № 2. – С. 87–98.
13. *Згуровский М. З., Мельник В. С., Новиков А. Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – Київ: Наук. думка, 2004. – 590 с.
14. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Метод штрафа для вариационых неравенств с многозначными отображениями // Кибернетика и систем. анализ: Ч. I. – 2000. – № 4. – С. 57–69; Ч. II. – 2001. – № 5. – С. 41–53; Ч. III. – 2002. – № 2. – С. 70–83.
15. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* О разрешимости дифференциально-операторных включений и эволюционных вариационных неравенств, порожденных отображениями w_{λ_0}-псевдомонотонного типа // Укр. мат. вісн. – 2007. – **4**, № 4. – С. 535–581.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 09.06.2008

P. O. Kasyanov

On the weak solvability for a class of evolution variation inequalities in infinite-dimensional spaces

We consider the class of evolution variation inequalities with w_λ-pseudomonotone maps. The weak solvability for a class of evolution variation inequalities with nonlinear multivalued operators pseudomonotone on W_1 is proved by using the penalty method. The uniform a priori estimations in $L_1(S;V^*)$ for the derivatives of approximate solutions are obtained.