

В. Л. Поляков

## Фильтрационные деформации несвязных несуффозионных грунтов при установившейся одномерной безнапорной фильтрации

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Я. Олейником)

*Запропоновано кусково-лінійну апроксимацію залежності коефіцієнта фільтрації від градієнта напору. Сформульовано математичну задачу усталеної безнапірної фільтрації між паралельними недосконалими водотоками в незв'язному несуффозійному ґрунті, що зазнають фільтраційних деформацій другого роду (без мобілізації часток), і отримано її точний розв'язок. Виконано кількісний аналіз фільтраційного процесу в деформованому ґрунті, який свідчить про значущість таких деформацій для витрати і інших водно-фізичних характеристик.*

Интенсивное фильтрационное течение способно в несвязных грунтах существенно изменять их водно-физические свойства. Прежде всего, возникающая гидродинамическая сила при наличии в таком грунте мелких, неструктурных частиц нередко приводит к их мобилизации и переносу, т. е. фильтрационным деформациям первого рода. Последние углубленно изучаются экспериментальными и теоретическими методами уже на протяжении ряда десятилетий [1–4]. При выносе неструктурных частиц из грунта (внешняя суффозия) его проницаемость и пористость возрастают. Перераспределение же этих частиц внутри грунта (внутренняя суффозия) содействует образованию в нем слабопроницаемых прослоек.

Кроме того, при неправильной форме и неупорядоченном положении частиц скелета фильтрационный поток обуславливает их переориентацию в пространстве без перемещения. В итоге частицы располагаются регулярным образом и их сопротивление движению жидкости минимизируется. Благодаря этому проницаемость среды улучшается при неизменной пористости. Подобные трансформации грунта в силу их специфичности целесообразно считать отдельным видом фильтрационных деформаций, а именно, второго рода. Им подвержены различные несвязные грунты, в том числе и суффозионные. В последнем случае могут протекать деформации обоих видов одновременно. Существование фильтрационных деформаций второго рода было доказано специальными экспериментами, в ходе которых исследовалась связь между коэффициентом фильтрации  $k$  среды, сложенной из зерен примерно одного размера, и градиентом напора  $I$  в ней [5]. Установлено, что деформации начинались при достижении указанным градиентом критического значения  $I_k$ , а заканчивались, если  $I$  сравнилось с предельным значением  $I_u$ . Естественно, что каждому грунту, способному к подобным деформациям, отвечает присущая только ему пара констант  $I_k, I_u$ . Им соответствуют исходное  $k_0$  и предельное  $k_u$  значения коэффициента фильтрации. В промежутке  $[I_k, I_u]$  коэффициент  $I$  растет с увеличением  $k$  почти линейным образом. Поэтому есть все основания использовать для  $k(I)$  следующую кусочно-линейную аппроксимацию:

$$k = \begin{cases} k_0 & \text{при } I \leq I_k, \\ a + bI & \text{при } I_k < I < I_u, \\ k_u & \text{при } I \geq I_u. \end{cases} \quad (1)$$

В реальных условиях градиент  $I$  может меняться в весьма широких пределах, принимая наибольшие значения около водоприемника, а наименьшие — возле водоисточника. Роль источника и приемника воды чаще всего играют водотоки и горизонтальные дрены. Таким образом, деформирование грунта, как правило, протекает сложным образом с формированием двух-трех характерных зон. Одной из них обязательно является зона частичной деформации ( $L_u < x < L_k$ ;  $L_u, L_k$  — координаты ее внутренней и внешней границ). В ней коэффициент фильтрации есть переменная величина. Наличие зон полной деформации ( $0 \leq x \leq L_u$ ) и недеформированного грунта ( $L_k \leq x \leq L$ ,  $L$  — протяженность области фильтрации) необязательно. В дальнейшем предполагается исследовать теоретическими методами все возможные ситуации (способы деформаций), однако, ниже будет рассмотрена только одна, но наиболее сложная, когда в области движения присутствуют все три перечисленные зоны и значит  $0 < L_u < L_k < L$ .

Пусть установившаяся фильтрация осуществляется со свободной поверхностью в однородном несупфозионном грунте между несовершенными в гидродинамическом и конструктивном отношении водотоками (дренами). В связи с различными фильтрационными свойствами грунта в трех выделенных зонах исходная система состоит из следующих трех уравнений фильтрации:

$$\frac{d}{dx} \left( h_u \frac{dh_u}{dx} \right) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_u; \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( a + b \frac{dh}{dx} \right) h \frac{dh}{dx} \right] = 0, \quad L_u < x \leq L_k; \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} \left( h_0 \frac{dh_0}{dx} \right) = 0, \quad L_k < x \leq L, \quad (4)$$

где  $h_u, h, h_0$  — пьезометрические напоры в соответствующих зонах. Оператор краевых условий прежде всего включает условия постоянства уровня воды в несовершенных водотоках [6]

$$x = 0, \quad h_u^2 - 2\Phi_d \frac{dh_u^2}{dx} = M_d^2; \quad (5)$$

$$x = L, \quad h_0^2 + 2\Phi_s \frac{dh_0^2}{dx} = M_s^2. \quad (6)$$

Здесь  $\Phi_d, \Phi_s$  — фильтрационные сопротивления;  $M_d, M_s$  — уровни воды соответственно в приемнике и источнике. Условия сопряжения напоров и потоков на внутренних границах будут

$$x = L_u, \quad h_u = h; \quad k_u \frac{dh_u}{dx} = \left( a + b \frac{dh}{dx} \right) \frac{dh}{dx}; \quad (7)$$

$$x = L_k, \quad h = h_0; \quad \left( a + b \frac{dh}{dx} \right) \frac{dh}{dx} = k_0 \frac{dh_0}{dx}. \quad (8)$$

Наконец, поскольку положение внутренних границ заранее неизвестно, то для их определения предлагаются дополнительные условия

$$x = L_u, \quad \frac{dh_u}{dx} = I_u; \quad (9)$$

$$x = L_k, \quad \frac{dh_0}{dx} = I_k. \quad (10)$$

Решение задачи (2)–(10) построено в несколько этапов. В первую очередь найдены представления для функций — напоров  $h_u$ ,  $h_0$ , содержащие неизвестную постоянную  $B$ ,

$$h_u = \sqrt{M_d^2 + \frac{2B}{k_u}(x + 2\Phi_d)}, \quad (11)$$

$$h_0 = \sqrt{M_s^2 + \frac{2B}{k_0}(x - L - 2\Phi_s)}. \quad (12)$$

Общий интеграл уравнения (3) имеет вид

$$x + C = S(h) = 2b \int \frac{\sqrt{h} dh}{\sqrt{a^2 h + 4bB - a\sqrt{h}}}. \quad (13)$$

С помощью условий (7), (8) исключена постоянная  $C$  и выводится уравнение относительного ключевого параметра  $B$

$$L_k(B) - L_u(B) = 2b \int_{h_u(B)}^{h_0(B)} \frac{\sqrt{\xi} d\xi}{\sqrt{a^2 \xi + 4bB - a\sqrt{\xi}}}, \quad (14)$$

где  $h_u(B)$ ,  $h_0(B)$  определяются из (11), (12), в которых полагаются  $x = L_u$  и  $x = L_k$  соответственно. Уравнение (14) пока содержит три неизвестных —  $B$ ,  $L_u$ ,  $L_k$ . Последние удастся выразить через  $B$ . С этой целью выражения (11), (12) сначала дифференцируются, а затем привлекаются условия (9), (10). В итоге получено

$$L_u = -2\Phi_d + \frac{k_u}{2B} \left( \frac{B^2}{k_u^2 I_u^2} - M_d^2 \right), \quad (15)$$

$$L_k = L + 2\Phi_s + \frac{k_0}{2B} \left( \frac{B^2}{k_0^2 I_k^2} - M_s^2 \right). \quad (16)$$

В дальнейшем вводятся относительные переменные и параметры:  $\bar{L}_k = L_k/L$ ,  $\bar{L}_u = L_u/L$ ,  $\bar{B} = B/(k_0 L I_0^2)$ ,  $I_0 = (M_s - M_d)/L$ ,  $\bar{a} = a/k_0$ ,  $\bar{b} = bI_0/k_0$ ,  $\bar{I}_k = I_k/I_0$ ,  $\bar{I}_u = I_u/I_0$ ,  $\bar{k}_u = k_u/k_0$ . В результате этого базовое расчетное уравнение относительно  $\bar{B}$  имеет вид

$$\bar{L}_k(\bar{B}) - \bar{L}_u(\bar{B}) = 2\bar{b}\bar{B}(S_1 - S_2), \quad (17)$$

где

$$S_1 = \frac{\bar{a}}{8\bar{b}\bar{I}_k^2} + \left( \frac{1}{8\bar{b}\bar{I}_k} + \frac{1}{4\bar{a}^2} \right) \sqrt{\frac{\bar{a}^2}{\bar{I}_k^2} + \frac{4\bar{b}}{\bar{I}_k}} - \frac{\bar{b}}{2\bar{a}^3} \ln \left( 2\bar{a} \sqrt{\frac{\bar{a}^2}{\bar{I}_k^2} + \frac{4\bar{b}}{\bar{I}_k}} + \frac{2\bar{a}^2}{\bar{I}_k} + 4\bar{b} \right), \quad (18)$$

$S_2$  следует вычислять по (18) после замены  $\bar{I}_k$  на  $\bar{k}_u \bar{I}_u$ . Подстановка (15), (16) в (17) и последующие громоздкие преобразования позволили получить в конце концов для  $\bar{B}$  квадратное уравнение

$$\tilde{S}\bar{B}^2 + 2(1 + 2\bar{\Phi}_d + 2\bar{\Phi}_s)\bar{B} + \bar{k}_u \bar{M}_d^2 - \bar{M}_s^2 = 0, \quad (19)$$

где

$$\tilde{S} = \frac{1}{\bar{I}_k^2} - \frac{1}{\bar{k}_u \bar{I}_k^2} - 4\bar{b}(S_1 - S_2).$$

Таким образом,

$$\bar{B} = -\frac{1}{\tilde{S}} \left( \sqrt{(1 + 2\bar{\Phi}_d + 2\bar{\Phi}_s)^2 + \tilde{S}(\bar{M}_s^2 - \bar{k}_u \bar{M}_d^2)} + 1 + 2\bar{\Phi}_d + 2\bar{\Phi}_s \right). \quad (20)$$

Теперь уже можно рассчитывать распределение напора во всей области фильтрации на базе следующей системы уравнений:

$$\bar{h}_u = \frac{h_u}{M_s - M_d} = \sqrt{\bar{M}_d^2 + \frac{2\bar{B}}{\bar{k}_u}(\bar{x} + 2\bar{\Phi}_d)}, \quad 0 \leq \bar{x} \leq \bar{L}_u; \quad (21)$$

$$\bar{x} = \bar{L}_u + 2\bar{b}[S(\bar{h}) - \bar{B}S_2(\bar{h})], \quad \bar{L}_u < \bar{x} < \bar{L}_k; \quad (22)$$

$$\bar{h}_0 = \frac{h_0}{M_s - M_d} = \sqrt{\bar{M}_s^2 + \frac{2\bar{B}}{k_0}(\bar{x} - 1 - 2\bar{\Phi}_s)}, \quad \bar{L}_k \leq \bar{x} \leq 1, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, \quad \bar{h} = \frac{h}{M_s - M_d}, \\ S(\bar{h}) &= \frac{\bar{a}\bar{h}^2}{8\bar{b}\bar{B}} + \left( \frac{\bar{h}}{8\bar{b}\bar{B}} + \frac{1}{4\bar{a}^2} \right) \sqrt{\bar{a}^2\bar{h}^2 + 4\bar{b}\bar{B}\bar{h}} - \frac{\bar{b}\bar{B}}{2\bar{a}^3} \ln(2\bar{a}\sqrt{\bar{a}^2\bar{h}^2 + 4\bar{b}\bar{B}\bar{h}} + 2\bar{a}^2\bar{h} + 4\bar{b}\bar{B}). \end{aligned} \quad (24)$$

Установившийся фильтрационный расход в деформированном грунте  $Q$  составляет

$$Q = k_u h_u \frac{dh_u}{dx} = B. \quad (25)$$

В недеформированном же грунте при аналогичных условиях расход  $Q_0$ , как известно [7], будет

$$Q_0 = k_0 \frac{M_s^2 - M_d^2}{2(L + 2\bar{\Phi}_d + 2\bar{\Phi}_s)}. \quad (26)$$

Степень отклонения отношения указанных расходов от 1 может служить мерой деформационного эффекта. Поэтому предметом последующих расчетов становится преимущественно параметр  $G$ , а именно:

$$G = \frac{Q}{Q_0} = \frac{2\bar{B}}{\bar{M}_s + \bar{M}_d}. \quad (27)$$

Влияние фильтрационных деформаций без мобилизации частиц на фильтрационный процесс в несвязном грунте между параллельными водотоками оценивалось на ряде примеров. Чтобы отразить разнообразие водно-физических свойств несуперпозиционных грунтов, варьировались в широких пределах  $\bar{k}_u$  (от 1 до 3) и  $\bar{I}_u$  (от 1 до 5). Остальные параметры задачи имели единственные значения, которые специально подбирались с тем, чтобы

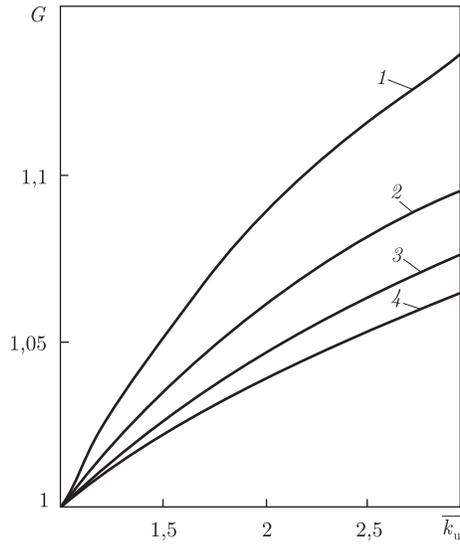


Рис. 1. Графики зависимости  $G(\bar{k}_u)$ : 1 –  $\bar{I}_u = 2$ ; 2 –  $\bar{I}_u = 3$ ; 3 –  $\bar{I}_u = 4$ ; 4 –  $\bar{I}_u = 5$

обеспечить присутствие в области движения всех трех зон, в частности  $\bar{I}_k = 1$ ,  $\bar{M}_d = 0$ . Водотоки считались совершенными и прорезали водоносную толщу до водоупора. Поэтому  $\Phi_d = \Phi_s = 0$ ,  $\bar{M}_s = 1$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  в аппроксимационном выражении для  $k(I)$  (1) вычислялись с учетом крайних значений  $k_0$ ,  $k_u$  по формулам

$$a = k_0 - \frac{k_u - k_0}{I_u - I_k} I_k, \quad b = \frac{k_u - k_0}{I_u - I_k}.$$

В первую очередь был рассчитан параметр  $G$  при непрерывно меняющемся  $\bar{k}_u$  и дискретно  $\bar{I}_u$ . Кривые  $G(\bar{k}_u)$  представлены на рис. 1 и свидетельствуют о заметном увеличении фильтрационного расхода с ростом  $\bar{k}_u$  (до 13%). Важно отметить, что столь ощутимое усиление фильтрации происходит несмотря на локальный характер деформаций, которые имеют место только вблизи водоприемника. На рис. 2 показано положение обеих внутренних границ в зависимости от  $\bar{k}_u$  при двух резко отличающихся значениях  $\bar{I}_u$ . Отсюда видно, что область деформаций занимает сравнительно небольшую часть области фильтрации, а максимальная протяженность первой равна примерно  $0,4L$ . Кроме того, величины  $\bar{k}_u$ ,  $\bar{I}_u$  незначительно отражаются на  $\bar{L}_u$ ,  $\bar{L}_k$ . По мере увеличения  $\bar{I}_u$  зона полной деформации сокращается и в силу своей малости почти не сказывается на скорости фильтрации. В то же время характерные градиенты  $\bar{I}_k$ ,  $\bar{I}_u$  оказывают большое влияние на расход воды, что подтверждается изображенными на рис. 3 графиками зависимости  $G(\bar{I}_u)$ . При приближении  $\bar{I}_u$  к  $\bar{I}_k$  эффект деформаций нарастает. Объясняется это уменьшением длины зоны частичной деформации, которая в пределе ( $\bar{I}_u = \bar{I}_k$ ) вообще исчезает. Тогда данная область будет состоять из двух зон, а коэффициент фильтрации при переходе из одной зоны в другую станет меняться скачком. Соответствующие такой предельной ситуации максимальные значения  $G$  равны 1,268; 1,176 и 1,101 при  $\bar{k}_u = 3$ ; 2; 1,5 соответственно.

Следует иметь в виду, что на практике деформации могут охватывать и всю область движения, обуславливая тем самым значительное усиление фильтрационного течения. Но и в детально рассмотренном выше случае изменение ориентации частиц в состоянии весьма серьезно повлиять на водно-физические характеристики и, прежде всего, расход.

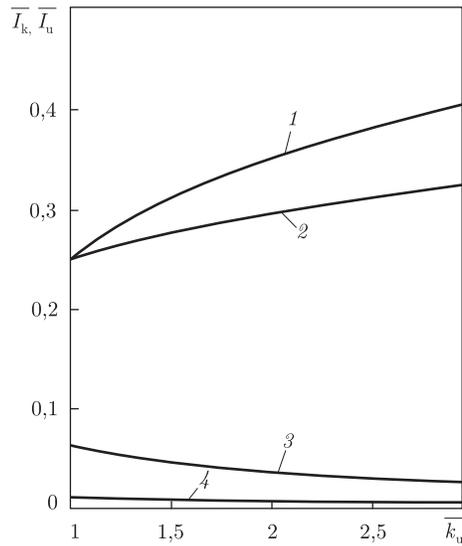


Рис. 2. Графики зависимости  $\bar{L}_u(\bar{k}_u), \bar{L}_k(\bar{k}_u)$ : 1, 2 –  $\bar{L}_k$ ; 3, 4 –  $\bar{L}_u$ ; 1, 3 –  $\bar{I}_u = 1$ ; 2, 4 –  $\bar{I}_u = 5$

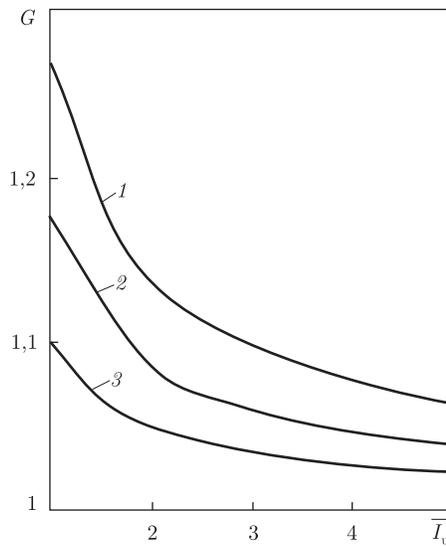


Рис. 3. Графики зависимости  $Q(\bar{I}_u)$ : 1 –  $\bar{k}_u = 3$ ; 2 –  $\bar{k}_u = 2$ ; 3 –  $\bar{k}_u = 1,5$

В заключение необходимо подчеркнуть, что даже по результатам ограниченного количественного анализа, выполнявшегося для иллюстрации методики оценки значимости деформаций второго рода, можно сделать вывод об их важной роли в формировании водного режима несвязных несuffузионных грунтов.

1. *Дмитриев А. Ф., Хлапук Н. Н., Дмитриев Д. А.* Деформационные процессы в несвязных грунтах в придренной зоне и их влияние на работу осушительно-увлажнительных систем. – Ровно: Изд. РГТУ, 2002. – 145 с.
2. *Дренаж с волокнистыми фильтрами для защиты территорий от подтопления / Н. Г. Пивовар, Н. Г. Бугай, В. Л. Фридрихсон и др.* – Киев: Изд. Ин-та гидромеханики НАН Украины, 2000. – 332 с.
3. *Поляков В. Л.* Механическая суффозия в дренируемом грунте // Прикл. гидромеханика. – 2002. – 4, № 4. – С. 60–73.

4. Ojha C. S. P., Singh V. P., Adrian D. D. Determination of critical head in soil piping // J. Hydraul. Eng. – 2003. – **129**, No 7. – P. 511–518.
5. Дмитрієв Д. А. Вплив суфозійних деформацій у ґрунті на коефіцієнт фільтрації // Вісн. Рівненського держ. техн. ун-ту. – 1999. – С. 132–135.
6. Олейник А. Я., Поляков В. Л. Дренаж переувлажненных земель. – Киев: Наук. думка, 1987. – 279 с.
7. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. – Москва: Наука, 1977. – 664 с.

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 13.06.2008*

**V. L. Polyakov**

### **Hydrodynamic deformations of cohesiveless soils at a steady gravity groundwater flow**

*A linear-piece approximation is suggested for the hydraulic conductivity-head gradient dependence. A mathematical task is stated for a steady groundwater flow between two parallel channels (drains) in cohesiveless soil which is subjected to hydrodynamic deformations of the second type (without mobilization of particles), and an exact solution is obtained. A quantitative analysis of the deformation effect on the flow rate and hydraulic characteristics is performed.*