

Член-корреспондент НАН Украины Ю. Н. Савченко, Ю. А. Семенов

Влияние поверхностного натяжения на параметры кавитационного течения

Розглянуто вплив поверхневого натягу на параметри кавітаційної течії при сталому обтіканні пластинки з закругленими кромками. Рідина вважається ідеальною, невагомою і нестисливою, а течія — безвихоровою. Розв'язок задачі шукається в області параметричної змінної шляхом знаходження аналітичних виразів для функцій комплексного потенціалу течії і для функцій, що конформно відображає область параметра на область течії у фізичній площині. Динамічна гранична умова, що включає силу поверхневого натягу, дає можливість одержати інтегральне рівняння відносно модуля швидкості на вільній межі. Запропоновані розрахунки впливу числа Вебера і радіуса закруглення кромки пластинки на геометричні розміри каверни і коефіцієнт опору пластинки.

Сила поверхностного натяжения возникает на границе раздела фаз в результате работы обратимого изотермокинетического процесса образования свободной границы. В соответствии с уравнением Юнга-Лапласа на границе раздела фаз возникает скачок давления, величина которого пропорциональна кривизне поверхности. Это приводит к усложнению динамического граничного условия, так как скорость на границе каверны зависит от ее кривизны. Существенная трудность в учете сил поверхностного натяжения связана с тем, что в предельном случае отсутствия поверхностного натяжения, согласно результатам теории струй идеальной жидкости, кривизна свободной поверхности в точке отрыва потока от острой кромки обращается в бесконечность. Введение в такую модель даже малого значения коэффициента поверхностного натяжения приводит к бесконечной силе и отсутствию кавитации.

Попытки учесть силу поверхностного натяжения в задачах кавитационных течений сделаны в работах [1–4]. В работе [3] с использованием метода сращиваемых асимптотических разложений рассмотрен случай малых значений поверхностного натяжения. При этом кривизна свободной границы в точке отрыва равна кривизне пластины. Такая постановка задачи приводит к возникновению волн на свободной поверхности. В [4] показано, что эти волны не имеют физической основы, так как требуют подвода энергии из бесконечности. В работах [1, 2] предполагается, что в точке отрыва потока касательная к границе течения является разрывной функцией. Согласно теории струй идеальной жидкости [7], такое предположение приводит к тому, что скорость и кривизна в точке отрыва обращаются в бесконечность. Это не позволяет получить непрерывный переход к предельному случаю отсутствия поверхностного натяжения, при котором скорость в точке отрыва имеет конечное значение.

В настоящей работе показано, что точка отрыва потока от гладкой поверхности в присутствии силы поверхностного натяжения определяется условием Бриллюэна-Вилла, таким же образом, как и для течения без учета поверхностного натяжения. Острая кромка рассматривается как предельный случай при стремлении кривизны закругленной кромки

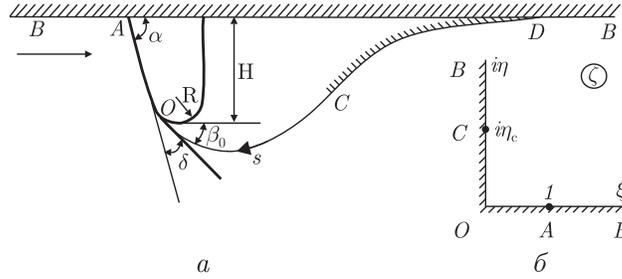


Рис. 1. Схема кавитационного обтекания криволинейного контура: *a* — физическая плоскость; *b* — область параметра

пластинки к бесконечности. В такой постановке физических противоречий в решении задачи не возникает, а течение с нулевой силой поверхностного натяжения получается как предельный случай.

Схема симметричного обтекания криволинейного препятствия потоком идеальной несжимаемой жидкости с образованием каверны за телом представлена на рис. 1. Клиновидное тело с углом α при вершине имеет прямолинейную часть, сопряженную с дугой окружности радиусом R . Каверна отрывается на закругленной части тела в точке O под углом β_0 и замыкается на криволинейный контур CDB , на котором задано распределение скорости. Точка C , являющаяся точкой перегиба на контуре OCB , соответствует концу каверны и началу контура замыкания. В качестве характерного размера выбрана максимальная ширина тела H .

На границе каверны действие силы поверхностного натяжения приводит к скачку давления, которое определяется в соответствии с уравнением Юнга–Лапласа

$$P - P_c = \tau\chi, \quad (1)$$

где P — давление на границе каверны со стороны жидкости; P_c — давление в каверне; τ — коэффициент поверхностного натяжения; $\chi = d\gamma/ds$ — кривизна контура каверны; γ — угол, образованный касательной к контуру каверны и осью OX . Кривизна контура каверны вблизи точки отрыва O принимает отрицательные значения, так как для выбранного направления координаты s угол касательной к контуру каверны, *гамма*, уменьшается при увеличении s . Как следует из уравнения (1), при $\chi < 0$ поверхностное натяжение приводит к уменьшению давления на границе каверны со стороны жидкости.

Уравнение Бернулли для рассматриваемого безвихревого течения

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \frac{V_\infty^2}{2} + \frac{P_\infty}{\rho} \quad (2)$$

позволяет выразить скорость на границе каверны, которая с учетом уравнения (1) в безразмерном виде определяется выражением

$$v = \frac{V}{V_\infty} = \sqrt{1 + \sigma - \frac{2\chi H}{We}}, \quad (3)$$

где $We = \rho V_\infty^2 H / \tau$ — число Вебера; τ — коэффициент поверхностного натяжения.

Так как течение безвихревое, то можно ввести в рассмотрение потенциал ϕ и функцию тока ψ , сопряженную гармонически. Эти функции определены в области параметрического переменного, в качестве которой выбран первый квадрант (рис. 1, б). В соответствии с теоремой о конформных отображениях, расположение трех точек может быть выбрано произвольно: точкам O , A и B в физической плоскости соответствуют точки $\zeta = 0$, $\zeta = 1$ и $\zeta = \infty$ в области параметра.

Математическая постановка задачи включает нахождение комплексного потенциала течения $w = \phi + i\psi$, удовлетворяющего условию непротекания на теле и динамическому граничному условию (3) на свободной границе. Следуя методам Жуковского [5] и Чаплыгина [6, 7], решение задачи ищется путем построения выражений комплексной скорости dw/dz и производной комплексного потенциала $dw/d\zeta$ в области параметрического переменного ζ . Если эти выражения найдены, то зависимость между областью параметра и физической областью течения определяется отображающей функцией

$$z(\zeta) = z_0 + \int_0^{\zeta} \frac{dw/d\zeta'}{dw/dz} d\zeta'. \quad (4)$$

Метод построения выражений комплексной скорости и производной комплексного потенциала для смешанной краевой задачи представлен в работе [8]. Требуется найти функцию dw/dz , удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{dw}{dz}\right) &= -\beta(\xi), & 0 < \xi < 1, & \quad \eta = 0, \\ \arg\left(\frac{dw}{dz}\right) &= 0, & 1 < \xi < \infty, & \quad \eta = 0, \\ \left|\frac{dw}{dz}\right| &= v(\eta), & 0 < \eta < \infty, & \quad \xi = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\beta(\xi)$ — функция угла касательной с осью OX от координаты действительной оси области параметра, которая уменьшается при движении вдоль тела от точки O к точке A , $\beta(1) = -\alpha$; $v(\eta)$ — зависимость модуля скорости на свободной границе от координаты мнимой оси области параметра, которая будет найдена ниже.

Выражение комплексной скорости, удовлетворяющее приведенным выше граничным условиям, имеет вид

$$\frac{dw}{dz} = v_0 \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^{\alpha/\pi} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\beta}{d\xi'} \ln \left(\frac{\zeta - \xi'}{\zeta + \xi'} \right) d\xi' - \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d \ln v}{d\eta'} \ln \left(\frac{i\eta' - \zeta}{i\eta' + \zeta} \right) d\eta' \right]. \quad (6)$$

Подставляя поочередно $\zeta = \xi$ и $\zeta = i\eta$ в выражение (6), можно убедиться, что граничные условия (5) выполняются.

Производная комплексного потенциала находится методом особых точек Чаплыгина [7]

$$\frac{dw}{d\zeta} = K\zeta, \quad (7)$$

где K — масштабный множитель, который будет определен ниже.

Подставляя выражения (6) и (7) в (4), можно найти производную отображающей функции $z = z(\zeta)$, а также зависимости координат вдоль контура тела и свободной границы $s = s(\xi)$ и $s = s(\eta)$:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{K\zeta}{v_0} \left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \right)^{\alpha/\pi} \exp \left[\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta'} \ln \left(\frac{i\eta' - \zeta}{i\eta' + \zeta} \right) d\eta' \right] \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta}{d\xi'} \ln \left(\frac{\zeta - \xi'}{\zeta + \xi'} \right) d\xi' \right], \quad (8)$$

$$s(\eta) = - \int_0^\eta \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=i\eta} d\eta = -K \int_0^\eta \frac{\eta}{v(\eta)} d\eta, \quad s(\xi) = \int_0^\xi \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=\xi} d\xi. \quad (9)$$

Масштабный коэффициент K , входящий в выражения (9), определяется из условия для длины смоченной части тела $S_w = s(\xi)|_{\xi=1}$.

Замыкание каверны задано в неявном виде путем задания распределения скорости на контуре замыкания CDB . Скорость на контуре CD уменьшается от значения $v_c = \sqrt{1 + \sigma - 2\chi H/We}$ в точке C до значения v_∞ в точке D . Распределение скорости на отрезке CD можно задать линейной функцией

$$v^*(s') = v_c(1 - s') + v_\infty s', \quad (10)$$

где $s' = (s - s_c)/S_{CD}$; s_c — координата точки замыкания каверны C , которая определяется из условия замыкания каверны

$$\text{Im} \left(\int_{\zeta=\infty} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta \right) = -\text{Im} \left(\int_{\zeta'=\infty} \frac{dz}{d\zeta'} \frac{d\zeta'}{\zeta'^2} \right) = -\frac{i\pi}{4} \text{res}_{\zeta'=0} \frac{d^2}{d\zeta'^2} \left(\frac{dz}{d\zeta'} \zeta' \right) = 0, \quad (11)$$

где $\zeta' = 1/\zeta$.

Вычисляя в выражении (11) интеграл по бесконечно большому контуру в области параметра, с помощью теоремы о вычетах условие замкнутости каверны приводит к следующему уравнению:

$$\int_0^1 \frac{d\beta}{d\xi'} \xi' d\xi' + \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta'} \eta' d\eta' + \alpha = 0. \quad (12)$$

Последнее уравнение выполняется за счет выбора координаты s_c в выражении (10), так как $v(\eta) = v^*[s(\eta)]$ на контуре замыкания каверны CD .

Точка отрыва потока от закругленной кромки определяется из условия Бриллюэна-Вилла [7], которое эквивалентно условию достижения экстремума для функции модуля скорости при движении вдоль контура тела

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\ln v)}{ds} = 0. \quad (13)$$

Используя соотношение $\frac{d \ln v}{ds} = \frac{d \ln v / d\xi}{ds / d\xi}$, дифференцируя функцию $v(\xi) = \left| \frac{dw}{dz} \right|_{\zeta=\xi}$ и подставляя полученный результат в выражение (13), получим

$$\int_0^1 \frac{d\beta}{d\xi'} \frac{d\xi'}{\xi'} - \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta'} + \alpha = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) представляет собой уравнение относительно длины смоченной части тела S_w , так как эта величина оказывает влияние на функцию $\beta(\xi) = \beta[s(\xi)]$, $0 < s < S_w$.

Граничные условия и соответствующие им интегро-дифференциальные уравнения. При известной форме криволинейного участка тела, задаваемой функцией $\beta(s)$, функция $\beta(\xi)$ определяется путем численного решения интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{d\xi} \quad (15)$$

(функция $ds/d\xi$ определяется выражением (8)).

Дифференцируя выражение (3), можно получить интегро-дифференциальное уравнение относительно функции $d[\ln v(\eta)]/d\eta$ в виде

$$\frac{d \ln v}{d\eta} = -\frac{2}{We} \frac{1}{v^2} \frac{d\chi}{d\eta}, \quad (16)$$

где χ — кривизна контура свободной границы, определяется дифференцированием угла наклона касательной к свободной границе $\chi = d\gamma/ds = (d\gamma/d\eta)/(ds/d\eta)$.

Выразив функцию касательной к контуру каверны

$$\gamma(\eta) = \arg \left(\frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\zeta=i\eta} \right)$$

из (7) и дифференцируя полученное выражение, можно найти кривизну свободной границы

$$\chi = -\frac{2v(\eta)}{K\pi\eta} \left[\frac{\alpha}{1+\eta^2} + \int_0^1 \frac{d\beta}{d\xi'} \frac{\xi' d\xi'}{\xi'^2 + \eta^2} - \int_0^\infty \frac{d(\ln v)}{d\eta'} \frac{\eta' d\eta'}{\eta'^2 - \eta^2} \right]. \quad (17)$$

Система уравнений (12), (14), а также интегро-дифференциальные уравнения (15) и (16) решаются численно методом последовательных приближений. На действительной и мнимой осях задаются фиксированные точки ξ_j , $j = 1, N$, а на мнимой оси — фиксированные точки η_j , $j = 1, M$. В качестве начального приближения принимается $\beta(\xi) \equiv 0$ и $v(\eta) \equiv v_\infty$.

Результаты расчетов. Рис. 2 демонстрирует результаты расчетов кавитационного обтекания пластинки, имеющей закругленную кромку радиусом $R = 0,05H$. Контур каверны показан тонкой линией, а контур замыкания — толстой. Можно видеть, что при больших значениях числа Вебера поверхностное натяжение не оказывает заметного влияния на параметры течения. Влияние поверхностного натяжения начинает проявляться при $We < 1000$, при этом длина и высота каверны уменьшаются. Можно предположить, что при дальнейшем уменьшении числа Вебера течение в предельном случае становится бескавитационным.

На рис. 3 представлены зависимости угла поворота потока на закругленной кромке (угол δ показан на рис. 1) от числа Вебера для различных значений радиуса закругления кромки пластинки. При больших числах Вебера, когда влиянием поверхностного натяжения на параметры кавитационного течения можно пренебречь, угол поворота потока зависит от радиуса закругления следующим образом: меньшему радиусу закругления соответствует меньший угол поворота потока. В предельном случае нулевого радиуса закругления (острая кромка) угол поворота стремится к нулю, что соответствует отрыву потока по

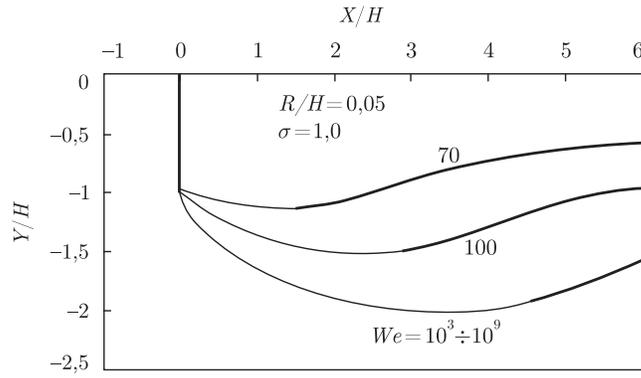


Рис. 2. Влияние числа Вебера на контур каверны при кавитационном обтекании пластинки пластики с радиусом закругления кромки $R/H = 0,05$ и числе кавитации $\sigma = 1,0$

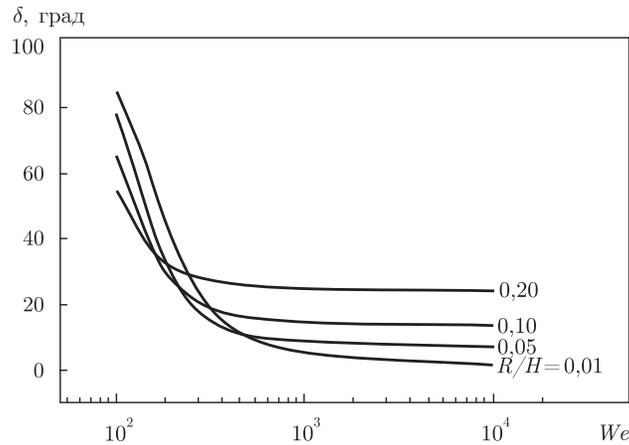


Рис. 3. Зависимость угла поворота потока на кромке пластинки от числа Вебера для различных значений радиуса закругления при числе кавитации $\sigma = 1,0$

касательной к прямолинейной части тела. При числах Вебера меньше 1000 поверхностное натяжение начинает оказывать влияние, причем для меньшего радиуса закругления это влияние начинает сказываться раньше. Из уравнения (1) видно, что перепад давления на контуре каверны вблизи точки отрыва потока будет больше для кромки с большей кривизной. На графике можно выделить две характерных области: область сильной зависимости угла поворота потока δ от числа Вебера при $We < 200$ и область слабой зависимости при $We > 200$. Анализ зависимостей угла поворота потока на кромке от числа Вебера при различных числах кавитации показал, что при увеличении числа кавитации угол поворота уменьшается, т. е. и влияние числа Вебера снижается. В области $We > 10^3$ значение числа Вебера практически не влияет на угол поворота потока. Анализ зависимостей коэффициента сопротивления от числа кавитации для различных значений числа Вебера показал, что уменьшение числа Вебера приводит к некоторому снижению коэффициента сопротивления.

На рис. 4 показано влияние числа Вебера в диапазоне от 200 до 2000 на параметры кавитационного течения при радиусе закругления входной кромки $R/H = 0,02$. На этом рисунке представлены зависимости относительного изменения максимальной ширины каверны $\Delta h_c/h_c$ и соответствующее ей расстояние от пластинки $\Delta L_c/L_c$, а также относительное

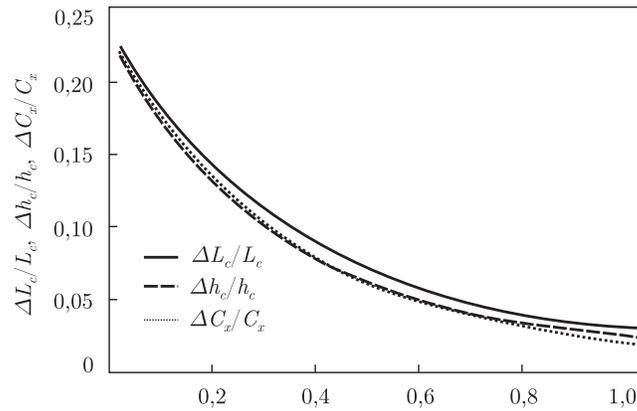


Рис. 4. Зависимость относительного изменения параметров течения при числах Вебера $We = 2000$ и $We = 200$ от числа кавитации: максимальной ширины каверны h_c , соответствующей ей длины L_c и h_c , соответствующей ей длины L_c и коэффициента сопротивления C_x

изменение коэффициента сопротивления $\Delta C_x/C_x$ как функции числа кавитации. Можно видеть, что при снижении числа кавитации влияние поверхностного натяжения увеличивается, а изменение указанных параметров находится в соответствии с изменением угла поворота потока на входной кромке.

Приведенные расчеты свидетельствуют о том, что поверхностное натяжение начинает оказывать заметное влияние на параметры кавитационного течения при числах Вебера менее 10^3 . Для суперкавитационных осесимметричных течений следует ожидать большего влияния поверхностного натяжения на параметры кавитационного течения, поскольку кривизна поверхности осесимметричной каверны имеет радиальную составляющую, т. е. больше, чем кривизна контура в меридианальной плоскости.

1. *Vanden-Broeck J.-M.* Nonlinear capillary free-surface flows // *J. of Eng. Math.* – 2004. – **50**. – P. 415–426.
2. *Vanden-Broeck J.-M.* The influence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacles // *J. of Fluid Mech.* – 1983. – **133**. – P. 255–264.
3. *Ackerberg R. C.* The effects of capillarity on free-stream line separation // *Ibid.* – 1975. – **70**, part 2. – P. 333–352.
4. *Cumberbatch E., Norbury J.* Capillarity modification of the singularity at a free-streamline separation point // *J. Mech. Appl. Maths.* – 1979. – **32**. – P. 303–312.
5. *Жуковский Н. Е.* Видоизменение метода Кирхгоффа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока // *Мат. сб. Моск. ун-та*, 1890. – Т. 15.
6. *Чаплыгин С. А.* О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (К теории аэроплана). – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1910. – 49 с.
7. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. – Москва: Наука, 1979. – 536 с.
8. *Семенов Ю. А.* Комплексный потенциал нестационарного течения со свободной границей // *Вестн. Херсон. ун-та*, 2003. – **2**. – С. 384–387.

Effect of a surface tension on the cavitating flow parameters

The effect of surface tension on the cavitating flow past a flat plate with rounded edges is considered. The fluid is taken to be inviscid, weightless, and incompressible, and the flow to be irrotational. An analytical solution of the problem is based on two governing expressions derived in an auxiliary parameter domain, which are a complex velocity and a derivative of the function mapping conformally the parameter plane onto the flow region. By using the dynamic boundary condition with taking the surface tension into account, we derive an integral equation in terms of the velocity modulus at the free surface. Numerical results concerning the effects of surface tension and the radii of the plate edges on the flow parameters are presented.