УДК 550.34.013

А. С. Костинский

Очаг землетрясения как возбудимая среда: теоретические сейсмограммы простейшей оптимальной модели

(Представлено академиком НАН Украины В. И. Старостенко)

У рамках підходу до описання осередку землетрусу з позицій механіки збудливих середовищ досліджується отримана автором як результат схеми оптимального конструювання обмежена в часі функція стрибка зсуву. Для відповідної "квазідинамічної" моделі будуються "наведені" теоретичні сейсмограми, аналізується характер залежності від параметрів моделі.

В пространстве "квазидинамических" моделей очага [1–3] выражение для смещения в дальней зоне

$$U_i(\vec{r},t) = \frac{\gamma_i\gamma_p\gamma_q\nu_k}{4\pi\rho\alpha^3}\iint\limits_{\Sigma}\frac{c_{jkpq}}{|\vec{\xi}-\vec{r}|}\frac{\partial}{\partial t}\left[U_j\left(\vec{\xi},t-\frac{|\vec{\xi}-\vec{r}|}{\alpha}\right)\right]d\Sigma(\xi) + \\ + \frac{(\delta_{ip}-\gamma_i\gamma_p)\gamma_q\nu_k}{4\pi\rho\beta^3}\iint\limits_{\Sigma}\frac{c_{jkpq}}{|\vec{\xi}-\vec{r}|}\frac{\partial}{\partial t}\left[U_j\left(\vec{\xi},t-\frac{|\vec{\xi}-\vec{r}|}{\beta}\right)\right]d\Sigma(\xi) \qquad (1)$$

есть линейный оператор, действующий на функцию $[U_j(\ldots)]$, и, поскольку размеры площадки малы, можно полагать, что

$$\iint\limits_{\Sigma}(\cdots)\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{U}(\cdots)]d\Sigma = \iint\limits_{\Sigma}(\cdots)\left(\overline{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{n}(t)}\cdot|[\mathbf{U}(\cdots)]| + \overline{\mathbf{n}(t)}\cdot\frac{\partial}{\partial t}|[\mathbf{U}(\cdots)]|\right)d\Sigma,$$

где единичный вектор направления $\mathbf{n}(t)$ и его производная по времени вычисляются в некоторой средней точке площадки. Характеристика системы при этих предположениях, следовательно, есть векторное поле

$$\vec{\Theta}(\vec{\xi},t) = \overline{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{n}(t)}\cdot|[\mathbf{U}(\vec{\xi},t)]| + \overline{\mathbf{n}(t)}\cdot\frac{\partial}{\partial t}|[\mathbf{U}(\vec{\xi},t)]|, \qquad \vec{\xi}\in\Sigma,$$

и для логики традиционного кинематического конструирования это была отправная точка, а путь определялся уверенностью, что для $\vec{\Theta}(\ldots)$ можно найти "земной" математический образ. Отсюда плоскость разрыва, распространяющаяся трещина сдвига и "нефизическое" решение самоподобной задачи [4]

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{n}(t)} = 0, \qquad \overline{\mathbf{n}(t)} = \overrightarrow{\mathrm{const}}(t), \qquad (2)$$

$$\overline{\mathbf{n}(t)}\cdot\vec{\Theta} \equiv \Delta U^s(\rho,t) = Kv\sqrt{t^2-\left(\frac{\rho}{v}\right)^2}\cdot H\left(t-\frac{\rho}{v}\right)\cdot\{1-H(\rho-\rho_0)\}, \quad K=\mathrm{const}, \qquad (3)$$

бесконечно возрастающее со временем. Тупик хаотических попыток "усовершенствовать" зависимость (3) можно преодолеть, если некоторая физическая конструкция, определенная с максимальной степенью абстракции, займет место "бестелесного" скачка смещения на разрыве как модели. Требуется, в общем, только способность тонкого слоя вещества генерировать и распространять возбуждение, т. е. состояние, дополнительное по отношению к основному состоянию. Это взгляд на явление как на эволюцию возбудимой среды [5], и, согласившись столь радикально изменить язык описания процесса в очаге, мы получаем дополнительные "степени свободы" конструирования, позволяющие оптимальным образом перейти от (3) к решению, более физически приемлемому, ограниченному во времени [6]:

$$\overline{\mathbf{n}(t)} \cdot \vec{\Theta} \equiv \Delta U^g(\rho, t) =$$

$$= K v T_c \arccos\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\rho}{vT_c}\right)}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{t}{T_c}\right)}\right) \cdot H\left(t - \frac{\rho}{v}\right) \cdot \{1 - H(\rho - \rho_0)\}, \qquad K = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Подставим выражение (4) в (1). Принимая предположения (2) и переходя к приближению дальней зоны однородной, изотропной среды, получим, что форма импульса смещения как в P-, так и в S-волне описывается интегралом:

$$\Omega_c(\vec{r}_S, t) = 2Kv\rho_0^2 \frac{T_c}{\tau} \frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{t'}{\tau}\right)} \iint\limits_{C_+} dxdy \arccos\left(\frac{\operatorname{ch} \dfrac{\tau}{T_c} r}{\operatorname{ch} \dfrac{\tau}{T_c}\left(\dfrac{t'}{\tau} + x\gamma\right)}\right) \cdot H\left(\frac{t'}{\tau} + x\gamma - r\right),$$

где x, y — безразмерные декартовы координаты, $r^2 = x^2 + y^2$, C_+ есть область, ограниченная верхней единичной полуокружностью и осью Ox. Разрыв зарождается в точке $\vec{r}_0$, $t' = t - \tau_0$, $\tau_0 = |\vec{r}_S - \vec{r}_0|/c$ — время запаздывания системы, ρ_0 — радиус площадки, $\tau = \rho_0/v$, $\gamma = v/c \sin\vartheta$. Угол ϑ образован нормалью к площадке и направлением из центра площадки на точку наблюдения $\vec{r}_S$.

Функция Хевисайда H под знаком интеграла в Ω_c приводит к тому, что область интегрирования суживается до подобласти C_+, точки которой удовлетворяют неравенству

$$r(x, y) < \frac{t'}{\tau} + x\gamma$$

(подобласть может совпадать с C_+). Когда параметры t'/τ, γ меняются, меняется и область интегрирования, следуя за положением ограничивающей кривой

$$r(x, y) = \frac{t'}{\tau} + x\gamma \tag{5}$$

по отношению к C_+. Наглядно представить ситуацию проще, если перейти от переменных интегрирования x, y к переменным x, r, рассматривая x, r по-прежнему как декартовы координаты на плоскости. В результате граница области C_+ преобразуется в треугольник, образованный горизонтальной прямой $r = 1$ и биссектрисами координатных углов $r = \pm x$; обозначим область, ограниченную треугольником, как S_+. Уравнение (5) в переменных x, r задает прямую

$$\Pi\colon r = \frac{t'}{\tau} + x\gamma,$$

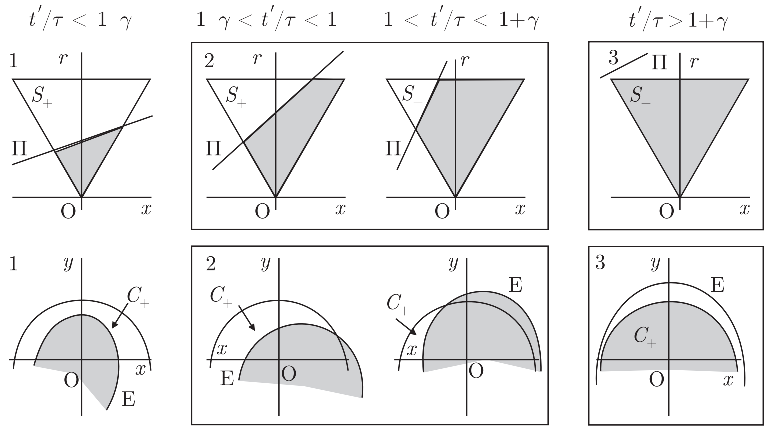

Рис. 1. Область интегрирования в Ω_c: возможные варианты

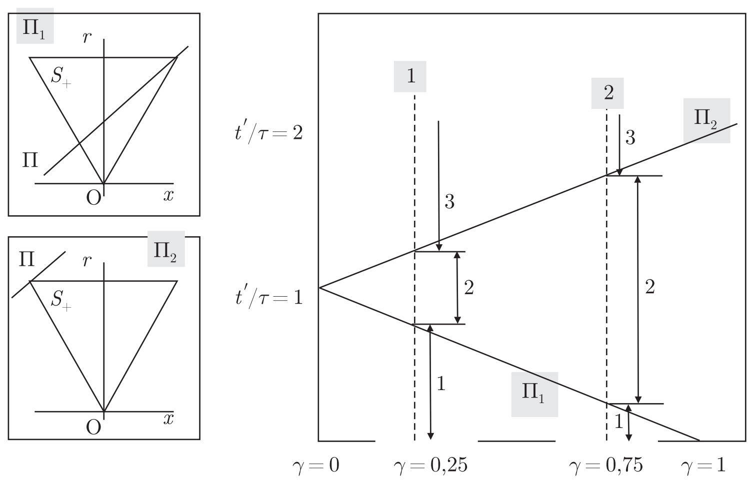

Рис. 2. "Характеристические" прямые на плоскости переменных t'/τ, γ. Затененные цифры 1, 2 над штриховыми линиями означают номер столбца "матрицы рисунков" рис. 3, цифры справа от штриховых линий соответствуют одному из вариантов положения прямой П по отношению к области S_+

возможны три варианта положения П по отношению к S_+ (рис. 1, верхняя строка символической "матрицы рисунков"). Интеграл в Ω_c с функцией H, таким образом, "распадается" на три интеграла (без H), непрерывно переходящие друг в друга при изменении параметров t'/τ, γ. Каждый интеграл берется по затененной части S_+, каждому соответствует своя геометрия области интегрирования и своя функциональная зависимость $\Omega_c(t'/\tau, \gamma)$.

Преобразование к переменным x, r приводит к появлению под интегралом множителя $(r^2 - x^2)^{-1/2}$, сингулярного в точках биссектрис координатных углов $r = \pm x$. Это осложняет численный расчет теоретических сейсмограмм (интегралы в Ω_c не могут быть выражены через элементарные или специальные функции). Поэтому с точки зрения вычислений удобнее пользоваться декартовыми координатами x, y. Кривая (5) в переменных x, y есть эллипс, множество точек эллипса, для которых $y > 0$, есть кривая

$$\mathrm{E}\colon\, y = \sqrt{\left(\frac{t'}{\tau} + x\gamma\right)^2 - x^2}.$$

Интегрирование в каждом из вариантов 1, 2, 3 выполняется по части C_+, определяемой неравенством:

$$y < \sqrt{\left(\frac{t'}{\tau} + x\gamma\right)^2 - x^2}$$

(см. рис. 1, нижняя строка “матрицы рисунков”).

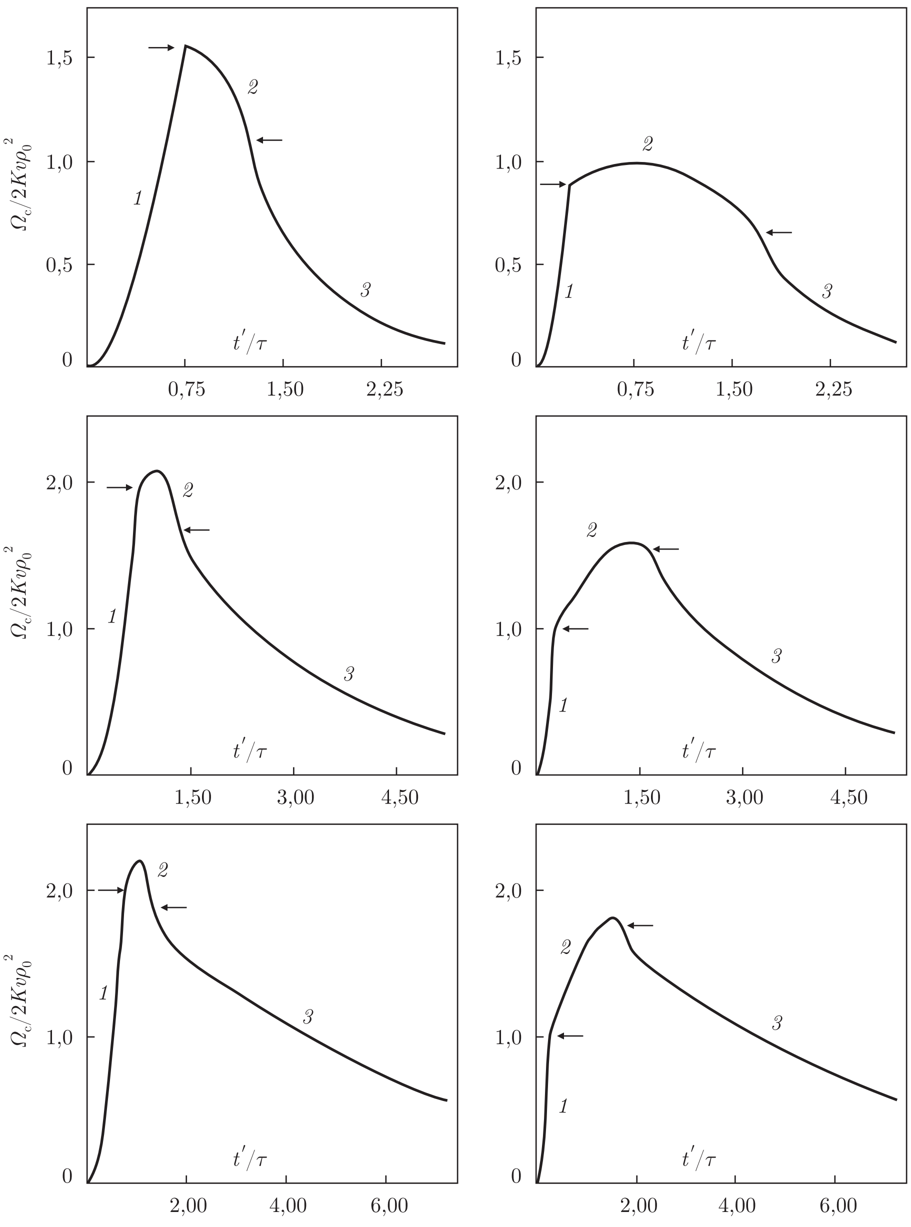

Рис. 3. Форма импульса смещения в дальней зоне для разных значений T_c/τ, γ. Номер столбца “матрицы рисунков” соответствует номеру сечения $\gamma = \mathrm{const}$ рис. 2, стрелки отделяют участки графика с разной функциональной зависимостью от t'/τ. Каждая строка “матрицы рисунков” соответствует фиксированному значению T_c/τ, для первой строки $T_c/\tau = 0{,}725$, для второй $T_c/\tau = 2{,}125$, для третьей $T_c/\tau = 4{,}225$

Перейдем в пространство параметров, в котором переменные t'/τ, γ, T_c/τ играют роль декартовых координат. Построив координатную плоскость $T_c/\tau = \text{const}$, обнаружим на ней две "характеристические" прямые, их расположение показано на рис. 2. Прямая Π_1 соответствует соотношению параметров t'/τ, γ, при котором точка $x = 1$, $r = 1$ принадлежит прямой Π ($t'/\tau = 1 - \gamma$), прямая Π_2 — соотношению $t'/\tau = 1 + \gamma$, когда точка $x = -1$, $r = 1$ принадлежит Π. Теперь легко представить структуру теоретических сейсмограмм ("приведенных", так как функция Ω_c описывает только форму импульса смещения). Каждая такая сейсмограмма (кусочно-гладкая) соответствует вертикальной координатной линии $\gamma = \text{const}$ (см. рис. 2). Участки гладкости (их три) — это участки неизменной функциональной зависимости от t'/τ при фиксированном значении γ. Форма теоретических сейсмограмм на каждом участке зависит от третьей условной координаты T_c/τ, но разбиение на участки от T_c/τ не зависит и определяется только величиной γ. Видно, как сдвигается вправо "эффективная" максимальная продолжительность импульса по мере увеличения T_c/τ (рис. 3).

1. *Molnar P., Tucker B., Brune J.* Corner frequencies of P- and S-waves and models of earthquake sources // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1973. – **63**. – P. 2091. – 2104.
2. *Sato T., Hirasawa T.* Body wave spectra from propagating shear crack // J. Phys. Earth. – 1973. – **21**. – P. 415–431.
3. *Dahlen F. A.* On the ratio of P-wave to S-wave corner frequences for shallow earthquake sources // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1974. – **64**. – P. 1159–1180.
4. *Burridge R., Willis J.* The self-similar problem of the expanding elliptical crack in an anisotropic solid // Proc. Cambr. Philosoph. Soc. – 1969. – **66**. – P. 443–468.
5. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математическая биофизика. – Москва: Наука, 1984. – 304 с.
6. *Костинский А. С.* Очаг землетрясения как возбудимая среда: простейший пример оптимального конструирования // Доп. НАН України. – 2002. – № 12. – С. 87–94.

Отдел сейсмологии Института геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины, Симферополь

Поступило в редакцию 04.08.2008

A. S. Kostinsky

Earthquake focus as an excitable medium: theoretical seismograms of the simplest optimal model

In the context of an approach to the description of earthquake foci from the positions of excitable medium mechanics, a bounded-in-time displacement discontinuity function obtained by the author as a result of the optimal construction scheme is studied. For the corresponding "quasidynamic" model, "reduced" theoretical seismograms are plotted, and the pattern of the dependence on model parameters is analyzed.