УДК 517.984.5

© 2009

А. С. Горюнов, В. А. Михайлец

О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов четного порядка

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

Розглянуто квазідиференціальні оператори парного порядку, що задані на скінченному інтервалі. За допомогою канонічних крайових умов знайдено параметричні описи всіх самоспряжених та максимальних дисипативних розширень мінімального симетричного квазідиференціального оператора в гільбертовому просторі $L_2([a,b],\mathbb{C})$, а також його узагальнених резольвент.

В последние годы в математической физике существенно усилился интерес к дифференциальным операторам с сингулярными коэффициентами (см., напр., [1, 2] и приведенную там библиогр). Некоторые из таких операторов можно интерпретировать как квазидифференциальные. Они естественным образом содержат в себе дифференциальные операторы (см. [3]). В связи с этим в настоящей работе исследуются симметрические в гильбертовом пространстве $L_2([a,b],\mathbb{C})$ квазидифференциальные операторы произвольного четного порядка. Они не охватываются рассмотренными в [4–6].

Основной результат работы состоит в биективном параметрическом описании посредством краевых условий канонического вида всех самосопряженных, максимальных диссипативных расширений минимального оператора и его обобщенных резольвент. При этом существенно используются результаты из [7–9]. Квазидифференциальные операторы нечетного порядка имеют некоторые особенности и будут рассмотрены отдельно.

1. Квазидифференциальные уравнения. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и на замкнутом интервале $[a,b]$ задана двойная последовательность функций $p_{k,s}(x) \in L_1([a,b],\mathbb{C})$, $k = 1,2,\ldots,m$, $s = 0,1,\ldots,k-1$.

Введем с их помощью рекуррентным образом квазипроизводные функции $y(x)$ порядков $\leqslant m$:

$$D_0 y := y, \qquad D := -i\frac{d}{dx},$$

$$D_k y := D(D_{k-1}y) + \sum_{s=0}^{k-1} p_{k,s}(x) D_s y, \qquad k = 1,2,\ldots,m.$$

Если существуют квазипроизводные $D_k y \in W_1^1([a,b],\mathbb{C})$, $k \leqslant m-1$, то квазипроизводная $D_m y$ также существует и является суммируемой на $[a,b]$ функцией.

Обозначим через $W_2^{[m]}([a,b],\mathbb{C}) =: W_2^{[m]}$ комплексное линейное пространство тех функций $y(x) \in L_2([a,b],\mathbb{C}) =: L_2$, для которых $D_k y(x) \in W_1^1([a,b],\mathbb{C})$, $k = 1,\ldots,m-1$, $D_m y(x) \in L_2$.

Приведем некоторые свойства квазидифференциальных уравнений $l(y) := D_m y = f(x)$.

Теорема 1. *Неоднородная задача Коши*

$$l(y) = f(x) \in L_2,$$

$$D_k y(c) = c_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1, \qquad c \in [a, b,]$$

имеет ровно одно решение $y(x) \in W_2^{[m]}$ *при любом наборе чисел*

$$c_k \in \mathbb{C}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Используя теорему 1, можно получить свойства решений однородного квазидифференциального уравнения

$$l(y) = 0, \qquad y \in W_2^{[m]}. \tag{1}$$

Пусть $y_1,\ y_2, \ldots, y_m$ — решения уравнения (1). Определитель

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_m) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ D_1 y_1 & D_1 y_2 & \ldots & D_1 y_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{m-1} y_1 & D_{m-1} y_2 & \ldots & D_{m-1} y_m \end{vmatrix}$$

естественно называть определителем Вронского этих решений.

Лемма 1. *Если решения* $y_1,\ y_2, \ldots, y_m$ *уравнения* (1) *линейно зависимы, то их определитель Вронского тождественно равен нулю на* $[a, b]$. *Обратно, если этот определитель равен нулю хотя бы в одной точке интервала* $[a, b]$, *то решения* $y_1,\ y_2, \ldots, y_m$ *линейно зависимы.*

Построим линейно независимую систему решений $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ однородного уравнения (1). Для этого выберем систему решений, которая удовлетворяет начальным условиям

$$D_{k-1} y_j(c) = a_{jk}, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, m, \qquad c \in [a, b],$$

где определитель матрицы $\|a_{jk}\|_{j,k=1}^m$ не равен нулю. Тогда линейно независимая система решений $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ однородного уравнения будет его фундаментальной системой решений.

Лемма 2. *Каждое решение однородного квазидифференциального уравнения* (1) *является линейной комбинацией функций фундаментальной системы решений.*

Из леммы 2 следует, что множество всех решений однородного квазидифференциального уравнения (1) порядка m образует комплексное линейное пространство размерности m.

2. Минимальный и максимальный операторы. В гильбертовом пространстве L_2 квазидифференциальное выражение $l(y) = D_m y$ порождает максимальный квазидифференциальный оператор

$$L_{\max}\colon y \in \mathrm{Dom}(L_{\max}) \to L_{\max} y = l(y), \qquad \mathrm{Dom}(L_{\max}) := W_2^{[m]}.$$

Минимальный квазидифференциальный оператор определяется как сужение оператора $L_{\max}$ на линейное многообразие

$$\mathrm{Dom}(L_{\min}) := \{y \in \mathrm{Dom}(L_{\max})\colon D_k y(a) = D_k y(b) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Будем предполагать далее, что почти всюду на $[a, b]$

$$\overline{p_{k,s}(x)} = p_{m-s, m-k}(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \qquad s = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Для таких (формально самосопряженных) квазидифференциальных выражений справедлив аналог формулы Лагранжа:

$$\int_a^b (D_m y \cdot \overline{z} - y \cdot \overline{D_m z}) dx = -i \sum_{k=1}^{m} D_{m-k} y \cdot \overline{D_{k-1} z} \Big|_{x=a}^{x=b},$$

где $y(x)$, $z(x)$ — произвольные функции из $W_2^{[m]}$.

Используя приведенные результаты, можно установить некоторые свойства минимального квазидифференциального оператора четного порядка $m = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 3. *Квазидифференциальное уравнение $l(y) = f(x) \in L_2$ имеет решение $y(x) \in \in W_2^{[2n]}$, удовлетворяющее условиям*

$$D_k y(a) = D_k y(b) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n-1,$$

тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ ортогональна в L_2 всем решениям однородного уравнения (1).

Лемма 4. *Справедливо ортогональное разложение*

$$R(L_{\min}) \oplus \operatorname{Ker}(L_{\max}) = L_2,$$

где $R(L_{\min})$ — область значений оператора $L_{\min}$, а $\operatorname{Ker}(L_{\max})$ — нуль-пространство оператора $L_{\max}$.

Лемма 5 (о сюрьективности). *Для произвольных наборов комплексных чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}\}$, $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2n-1}\}$ существует функция $y \in W_2^{[2n]}$ такая, что*

$$D_k y(a) = \alpha_k, \qquad D_k y(b) = \beta_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

Пользуясь леммами 3, 4, 5, можно доказать, что верна

Теорема 2. *Оператор $L_{\min}$ является плотно заданным замкнутым симметрическим оператором в пространстве L_2 с индексом дефекта* $(2n, 2n)$,

$$L_{\min}^* = L_{\max}, \qquad L_{\max}^* = L_{\min}.$$

3. Самосопряженные расширения. Из теоремы 2 вытекает, что содержателен вопрос об описании (с помощью однородных краевых условий) самосопряженных расширений в пространстве L_2 симметрического оператора $L_{\min}$. Для исчерпывающего ответа на него целесообразно использовать понятие пространства граничных значений (ПГЗ).

Пусть L — замкнутый симметрический оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с равными (конечными или бесконечными) дефектными числами. Следуя [7], введем

Определение. Тройка (H, Γ_1, Γ_2), где H — вспомогательное гильбертово пространство, а Γ_1, Γ_2 — линейные отображения $\operatorname{Dom}(L^*)$ в H, называется ПГЗ симметрического оператора L, если:

1) для любых f, $g \in \operatorname{Dom}(L^*)$

$$(L^* f, g)_{\mathcal{H}} - (f, L^* g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_H,$$

2) для любых векторов $f_1,\ f_2 \in H$ существует вектор $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$ такой, что $\Gamma_1 f = f_1$, $\Gamma_2 f\ =\ f_2$.

Из определения ПГЗ следует, что $f \in \mathrm{Dom}(L)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$. ПГЗ существует для любого симметрического оператора с равными ненулевыми дефектными числами. Оно не единственно. Удобный для приложений явный вид ПГЗ симметрического в гильбертовом пространстве L_2 оператора $L_{\min}$ дает следующее утверждение.

Теорема 3. *Тройка* $(\mathbb{C}^{2n}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, *где* $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ *— линейные отображения из* $W_2^{[2n]}$ *в* $\mathbb{C}^{2n}$ *такие, что*

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_1 y := i(D_{2n-1}y(a), \ldots, D_n y(a), -D_{2n-1}y(b), \ldots, -D_n y(b)),\\
&\Gamma_2 y := (D_0 y(a), \ldots, D_{n-1}y(a), D_0 y(b), \ldots, D_{n-1}y(b)),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

является пространством граничных значений оператора $L_{\min}$.

Из теоремы 3 и результатов, приведенных в [7], вытекает

Теорема 4. *Сужение оператора* $L_{\max}$ *на множество функций* $y(x) \in W_2^{[2n]}$, *удовлетворяющих однородному краевому условию*

$$
(K - I)\Gamma_1 y + i(K + I)\Gamma_2 y = 0,
\tag{3}
$$

где K *— унитарный оператор в пространстве* $\mathbb{C}^{2n}$, *является самосопряженным расширением* L_K *оператора* $L_{\min}$. *Обратно, для каждого самосопряженного расширения* $\widetilde{L}$ *оператора* $L_{\min}$ *найдется унитарный оператор* K *такой, что* $\widetilde{L} = L_K$. *Соответствие между унитарными операторами* $\{K\}$ *и расширениями* $\{\widetilde{L}\}$ *биективно.*

Теорема 5. *Краевые условия* (3) *будут разделенными, если и только если*

$$
K = \begin{pmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_b \end{pmatrix},
\tag{4}
$$

где $K_a,\ K_b$ *— унитарные операторы (матрицы) в пространстве* $\mathbb{C}^n$.

Для дифференциальных операторов с операторными коэффициентами аналоги теорем 4, 5 установлены в [11].

4. Диссипативные расширения и обобщенные резольвенты. Напомним, что плотно заданный линейный оператор L в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называют диссипативным, если

$$
\mathrm{Im}(Lf, f)_{\mathcal{H}} \geqslant 0, \qquad f \in \mathrm{Dom}(L),
$$

и максимальным диссипативным, если, кроме того, у L нет нетривиальных диссипативных расширений в пространстве $\mathcal{H}$. В частности, каждый симметрический оператор диссипативный, а самосопряженный — максимальный диссипативный.

Параметрическое описание всех максимальных диссипативных расширений симметрического квазидифференциального оператора $L_{\min}$ дает

Теорема 6. *Сужение оператора* $L_{\max}$ *на множество функций* $y(x) \in W_2^{[2n]}$, *удовлетворяющих однородному краевому условию* (3), *где* K *— сжатие в пространстве* $\mathbb{C}^{2n}$, *является максимально диссипативным расширением* L_K *оператора* $L_{\min}$. *Обратно, для каждого максимального диссипативного расширения* $\widetilde{L}$ *оператора* $L_{\min}$ *найдется сжатие* K *такое, что* $\widetilde{L} = L_K$. *Соответствие между сжатиями* $\{K\}$ *и расширениями* $\{\widetilde{L}\}$ *биективно.*

Теорема 7. *Диссипативные краевые условия вида* (3) *будут разделенными, если и только если матрица* K *имеет вид* (4)*, где* K_a*,* K_b *— сжатия в пространстве* $\mathbb{C}^n$*.*

Для формулировки следующей теоремы нам потребуются некоторые определения. Обобщенной резольвентой замкнутого симметрического оператора L называют операторную функцию R_λ комплексного параметра $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, допускающую представление вида

$$R_\lambda f = P^+(L^+ - \lambda I^+)^{-1} f, \qquad f \in \mathcal{H},$$

где L^+ — какое-либо самосопряженное расширение оператора L с выходом, вообще говоря, в более широкое, чем $\mathcal{H}$, пространство $\mathcal{H}^+$, I^+ — единичный оператор в $\mathcal{H}^+$, P^+ — оператор ортогонального проектирования в $\mathcal{H}^+$ на $\mathcal{H}$. Операторная функция R_λ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ является обобщенной резольвентой симметрического оператора L тогда и только тогда, когда

$$(R_\lambda f, g)_{\mathcal{H}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(F_\mu f, g)}{\mu - \lambda}, \qquad f, g \in \mathcal{H},$$

где F_μ — обобщенная спектральная функция оператора L. Это означает, что операторная функция F_μ, $\mu \in \mathbb{R}$, обладает следующими свойствами [10]:

1^0. При $\mu_2 > \mu_1$ разность $F_{\mu_2} - F_{\mu_1}$ является ограниченным неотрицательным оператором;

2^0. $F_{\mu+0} = F_\mu$ при всех вещественных μ;

3^0. При любом $x \in \mathcal{H}$

$$\lim_{\mu \to -\infty} \|F_\mu x\|_{\mathcal{H}} = 0, \qquad \lim_{\mu \to +\infty} \|F_\mu x - x\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Параметрическое внутреннее описание всех обобщенных резольвент симметрического в L_2 квазидифференциального оператора $L_{\min}$ дает

Теорема 8. *Имеется взаимно однозначное соответствие между обобщенными резольвентами оператора* $L_{\min}$ *и краевыми задачами*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\Gamma_1 y + i(K(\lambda) + I)\Gamma_2 y = 0,$$

где λ *— комплексное число,* $\operatorname{Im}\lambda < 0$*,* $h(x) \in L_2$*, а параметр* $K(\lambda)$ *— регулярная в нижней полуплоскости операторная функция в пространстве* $\mathbb{C}^{2n}$ *такая, что* $||K(\lambda)|| \leqslant 1$*. Оно задается равенством* $R_\lambda h = y$*,* $\operatorname{Im}\lambda < 0$*.*

Исследование поддержано Государственным фондом фундаментальных исследований Украины, грант № 14.1/003.

1. *Михайлец В. А., Молибога В. Н.* Возмущение периодических и полупериодических операторов распределениями Шварца // Доп. НАН України. – 2006. – № 7. – С. 26–31.
2. *Mikhailets V. A., Molyboga V. M.* Singular perturbed periodic and semiperiodic differenial operators // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, No 6. – С. 785–797.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 528 с.
4. *Шин Д.* Теорема существования квазидифференциального уравнения n-го порядка // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**, № 8. – С. 515–518.
5. *Шин Д.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Мат. сб. – 1940. – **7 (49)**, № 3. – С. 479–532.

6. *Шин Д.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Там же. – 1943. – **13 (55)**, № 1. – С. 39–70.
7. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
8. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. – 1976. – **100 (142)**, № 2 (6). – С. 210–216.
9. *Штраус А. В.* Обобщенные резольвенты симметрических операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – **18**, № 1. – С. 51–86.
10. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Москва: Наука, 1966. – 544 с.
11. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1969. – № 8. – С. 3–24.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 03.07.2008

A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets

On extensions of symmetric quasi-differential operators of even order

The quasi-differential operators of an even order on a compact interval are studied. Parametric descriptions by means of the canonical boundary conditions for self-adjoint and maximal dissipative extensions of a symmetric minimal quasi-differential operator in the Hilbert space $L_2([a,b],\mathbb{C})$ *and its generalized resolvents are found.*