УДК 517.956.4

В. В. Лаюк

Властивості розв'язків одного класу ультрапараболічних рівнянь

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Розглянуто ультрапараболічні рівняння, які узагальнюють класичне рівняння дифузії з інерцією Колмогорова і які виникають у теорії марковських випадкових процесів дифузійного типу. Для так званих L-розв'язків таких рівнянь установлено ряд тверджень типу принципу максимуму, які застосовуються до вивчення властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші та доведення теорем єдиності розв'язку задачі Коші.

У повідомленні розглядається клас рівнянь $\mathbf{E_{22}^B}$ із [1], який узагальнює клас рівнянь $\mathbf{E_{22}}$ ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з [2]. Для розв'язків цього класу рівнянь наводяться твердження типу принципу максимуму, які використовуються для вивчення властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші та доведення теорем про єдиність розв'язку задачі Коші. При цьому розв'язки розуміються в дещо послабленому, порівняно з класичними, сенсі, який використовує поняття похідної Лі від функції відносно відповідного векторного поля [1, 3–5]. Одержані результати посилюють і доповнюють відповідні результати з [2, 6, 7].

1. Розглядатимемо рівняння з виродженнями за двома групами просторових змінних. Для цього вважатимемо, що n-вимірна просторова змінна x складається з n_1-вимірної змінної $x_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_1})$, n_2-вимірної змінної $x_2 := (x_{21}, \ldots, x_{2n_2})$ і n_3-вимірної змінної $x_3 := (x_{31}, \ldots, x_{3n_3})$, тобто $x := (x_1, x_2, x_3)$. Тут n_1, n_2 і n_3 — такі натуральні числа, що $n_3 \leqslant n_2 \leqslant n_1$ і $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_l := (k_{l_1}, \ldots, k_{l_{n_l}}) \in \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$.

Об'єктом дослідження є рівняння вигляду

$$(Lu)(t,x) := \left(S_B - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} - a_0(t,x) \right) u(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

де $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x) | t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$,

$$S_B := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}^1 x_{1s} \right) \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} \left(\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s} \right) \partial_{x_{3j}}. \tag{2}$$

Усі коефіцієнти виразу (2) — дійсні числа, а коефіцієнти a_{js}, a_j і a_0 — дійснозначні функції, які визначені на $\Pi_{[0,T]}$.

Диференціальний вираз (2) можна записати як

$$S_B = \partial_t - (x, BD_x), \tag{3}$$

де B — матриця розміру $n \times n$, яка має вигляд

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 & O \\ O & O & B^2 \\ O & O & O \end{pmatrix}, \tag{4}$$

B^1, B^2 — матриці, складені відповідно з коефіцієнтів b^1_{sj}, $s \in \{1, \ldots, n_1\}$, $j \in \{1, \ldots, n_2\}$, b^2_{sj}, $s \in \{1, \ldots, n_2\}$, $j \in \{1, \ldots, n_3\}$; O — нульові матриці відповідних розмірів; $D_x := = \mathrm{col}(\partial_{x_{11}}, \ldots, \partial_{x_{1n_1}}, \partial_{x_{21}}, \ldots, \partial_{x_{2n_2}}, \partial_{x_{31}}, \ldots, \partial_{x_{3n_3}})$; $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$.

Для рівняння (1) використовуватимемо такі умови:

α_1) матриця (4), в якій блоки B^1 і B^2 записані відповідно у вигляді $\begin{pmatrix} B^1_1 \\ B^1_2 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} B^2_1 \\ B^2_2 \end{pmatrix}$, де B^1_1, B^1_2, B^2_1 і B^2_2 — матриці розмірів $n_2 \times n_2$, $(n_1 - n_2) \times n_2$, $n_3 \times n_3$ і $(n_2 - n_3) \times n_3$ відповідно, задовольняє умови $\det B^j_1 \neq 0$, $j \in \{1, 2\}$;

α_2) існує така стала $\delta > 0$, що для кожної точки $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, x)\sigma_{1j}\sigma_{1s} \geqslant \delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma^2_{1j}; \tag{5}$$

α_3) коефіцієнти a_{js}, a_j і a_0 обмежені та B_2-гельдерові з показником $\alpha \in (0, 1)$ в $\Pi_{[0,T]}$ у спеціальному сенсі, вказаному в [1];

α_4) коефіцієнти a_{js}, a_j і a_0 мають обмежені та B_2-гельдерові (у такому ж, як в умові α_3, сенсі) з показником $\alpha \in (0, 1)$ в $\Pi_{[0,T]}$ похідні того самого вигляду, при яких вони стоять;

α_5) коефіцієнти a_{js}, a_j і a_0 є неперервними функціями в $\Pi_{[0,T]}$, причому для всіх $(t, x) \in \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ виконується нерівність (5) і оцінки

$$|a_{js}(t, x)| \leqslant C_0(|x|^2 + 1), \quad |a_j(t, x)| \leqslant C_0(|x| + 1), \quad \{j, s\} \subset \{1, \ldots, n_1\}, \quad a_0(t, x) \leqslant C_0$$

з деякими сталими $\delta_0 > 0$ і $C_0 > 0$;

α_6) коефіцієнти a_{js}, a_j і a_0 — неперервні й обмежені функції в $\Pi_{[0,T]}$ і виконується нерівність (5).

Поряд з рівнянням (1) будемо розглядати спряжене рівняння

$$\begin{aligned} (L^*v)(\tau, \xi) := \left(-\partial_\tau + \sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{s=1}^{n_1} b^1_{sj}\xi_{1s}\right)\partial_{\xi_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3}\left(\sum_{s=1}^{n_2} b^2_{sj}\xi_{2s}\right)\partial_{\xi_{3j}}\right)v(\tau, \xi) - \\ - \sum_{j,s=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}}(a_{js}(\tau, \xi)v(\tau, \xi)) + \sum_{j=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}}(a_j(\tau, \xi)v(\tau, \xi)) - a_0(\tau, \xi)v(\tau, \xi) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$(\tau, \xi) \in \Pi_{[0,T)}$.

Під розв'язком рівняння (1) розумітимемо L-розв'язок у сенсі означення 2 з [1], а під виразом $S_B u$ — похідну Лі від функції u відносно векторного поля, заданого диференціальним виразом (2) або (3) (див. означення 1 з [1]).

Рівняння (1) і (6) належать до класу ультрапараболічних рівнянь і зустрічаються при дослідженні математичних моделей різних фізичних явищ у так званому дифузійному наближенні. Такі моделі в багатьох важливих випадках (наприклад, при вивченні броунівського руху) досить адекватно і відносно просто описують реальні явища.

Для рівняння (1) за умов $\alpha_1 - \alpha_3$ в [1] доведено існування та встановлені оцінки фундаментального L-розв'язку задачі Коші (ФРЗК) $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi\} \in \mathbb{R}^n$. Цю функцію природно трактувати як густину перехідних імовірностей відповідного марковського випадкового процесу дифузійного типу зі значеннями у фазовому просторі $\mathbb{R}^n$ з трьома різними групами фазових координат $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ і $x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$.

2. Наведемо декілька тверджень типу принципу максимуму для розв'язків (тобто L-розв'язків) рівняння (1) як в обмежених, так і деяких необмежених областях.

1^0. *Нехай D — обмежена область в $\mathbb{R}^n$; $u\colon [0,T]\times\overline{D} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, яка має в $(0,T]\times D$ неперервні похідну Лі та похідні за x_1, що входять у рівняння* (1)*; коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови α_1 і α_5. Якщо $(Lu)(t,x) \geqslant 0$, $(t,x) \in (0,T]\times D$, $u(t,x) \geqslant 0$, $(t,x) \in \partial([0,T]\times D) \setminus \{t=T\}$, то $u(t,x) \geqslant 0$, $(t,x) \in [0,T]\times\overline{D}$.*

Розглянемо область $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Нехай $P^0 := (t^0,x^0)$ — довільно взята точка з Ω. Позначимо через $S(P^0)$ множину всіх точок $Q \in \Omega$ таких, що їх можна з'єднати з P^0 простою неперервною кривою, яка лежить в Ω і вздовж якої координата t не спадає від Q до P^0. Через $C(P^0)$ будемо позначати компоненту перетину $\Omega \bigcap \{t=t^0\}$, яка містить P^0. Зазначимо, що $C(P^0) \subset S(P^0)$.

2^0. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *неперервні в Ω, задовольняється умова α_1, для будь-яких $(t,x) \in \Omega$ справджуються нерівності* (5) *і $a_0(t,x) \leqslant 0$, нехай функція u неперервна разом з похідною Лі та похідними за x_1, які входять у рівняння* (1)*. Тоді якщо в Ω $Lu \leqslant 0$ ($Lu \geqslant 0$) і функція u має в Ω додатний максимум (від'ємний мінімум), який досягається в точці P^0, то $u(P) = u(P^0)$ для всіх точок $P \in S(P^0)$.*

3^0. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови α_1, α_5 і $u\colon (0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ — функція, неперервна разом з похідною Лі та похідними за x_1, що входять у рівняння* (1)*, де $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_{R_0}$, B_{R_0} — куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса $R_0 > 0$ з центром у початку координат, або $\Omega = \mathbb{R}^n$. Якщо:*

1) $(Lu)(t,x) \geqslant 0$, $(t,x) \in (0,T]\times\Omega$;

2) $\liminf\limits_{(t,x)\to(t^0,x^0)} u(t,x) \geqslant 0$ для кожної точки $(t^0,x^0) \in \partial((0,T]\times\Omega) \setminus \{t=T\}$;

3) рівномірно щодо $t \in (0,T)$ існує $\liminf\limits_{|x|\to\infty} u(t,x) \geqslant 0$,

то $u(t,x) \geqslant 0$, $(t,x) \in (0,T]\times\Omega$.

Твердження, подібне до 2^0, правильне і для спряженого рівняння (6), якщо припустити, що для рівняння (1) виконуються умови α_1 і α_6 та існують неперервні й обмежені похідні за x_1 від a_{js} другого порядку і від a_j першого порядку.

4^0. *Нехай $u\colon [0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$ — функція, неперервна разом з похідною Лі та іншими похідними, що входять у спряжене рівняння* (6)*, де $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_{R_0}$, $R_0 > 0$, або $\Omega = \mathbb{R}^n$. Якщо:*

1) $(L^*u)(t,x) \leqslant 0$, $(t,x) \in [0,T)\times\Omega$;

2) $\limsup\limits_{(t,x)\to(t^0,x^0)} u(t,x) \leqslant 0$ для кожної точки $(t^0,x^0) \in \partial([0,T)\times\Omega) \setminus \{t=0\}$;

3) рівномірно щодо $t \in [0,T)$ існує $\limsup\limits_{|x|\to\infty} u(t,x) \leqslant 0$,

то $u(t,x) \leqslant 0$, $(t,x) \in [0,T)\times\Omega$.

5^0. *Нехай виконуються умови α_1 і α_6 і $u\colon \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{R}$ — функція, неперервна разом з похідною Лі та іншими похідними, що входять у рівняння* (1)*, і така, що $(Lu)(t,x) \geqslant 0$, $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, і для деяких чисел $B > 0$ і $b_l \geqslant 0$, $l \in \{1,2,3\}$, виконується нерівність*

$$u(t,x) \geqslant -B\exp\left\{\sum_{l=1}^{3} b_l|x_l|^2\right\}, \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}.$$

Якщо $\lim\limits_{t\to 0} u(t,x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, *то* $u(t,x) \geqslant 0$, $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$.

3. Одержані в [1] оцінки ФРЗК Z, деякі наведені в п. 2 твердження та правильна для підходящих функцій u і v формула типу Гріна–Остроградського:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} (vLu - uL^*v)(\theta,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} (vu)(\theta,y)\Big|_{\theta=t_1}^{t_2} dy,$$

дозволяють довести нижченаведену теорему про властивості функції Z.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* α_1–α_4. *Тоді ФРЗК* Z *має такі властивості:*

1) функція $Z^*(\tau,\xi;t,x) := Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi\} \in \mathbb{R}^n$, *є ФРЗК для спряженого рівняння* (6), *тобто* Z *є нормальним ФРЗК;*

2) нормальний ФРЗК єдиний;

3) $Z(t,x;\tau,\xi) > 0$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi\} \in \mathbb{R}^n$;

4) існує число $\Delta \in (0,T)$ *таке, що для будь-яких* $t_0 \in [0, T-\Delta]$, $(t,x) \in \Pi_{(t_0,t_0+\Delta]}$ *і* $\delta \in (0, t-t_0)$ *існують числа* $\omega > 0$ *і* $\gamma > 0$, *з якими справджується нерівність*

$$Z(t,x;\tau,\xi) \geqslant \omega \exp\{-\gamma|\xi|^2\}, \qquad (\tau,\xi) \in \Pi_{[t_0,t-\delta]};$$

5) функція Z *є розв'язком функціонального рівняння*

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\beta,y)Z(\beta,y;\tau,\xi)\,dy, \qquad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \qquad \{x,\xi\} \in \mathbb{R}^n;$$

6) для матриці дифузії $A := (a_{js})_{j,s=1}^{n_1}$, *вектора знесення* $a := (a_1,\ldots,a_{n_1})$ *і коефіцієнта* a_0 *виконуються рівності*

$$A(t,x) = \left(2^{-1}\lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} (y_{1j}-x_{1j})(y_{1s}-x_{1s})Z(t,x;\tau,y)\,dy\right)\right)_{j,s=1}^{n_1},$$

$$a(t,x) = \lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} (y_1-x_1)Z(t,x;\tau,y)\,dy\right),$$

$$a_0(t,x) = \lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\left(\int_{\tau}^{t} d\theta\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)\,dy - 1\right)\right), \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}.$$

4. За допомогою тверджень 3^0 і 5^0, а також методики, яка використовує спряжене рівняння і формулу Гріна–Остроградського, доводяться наведені нижче три варіанти теорем про єдиність розв'язків задачі Коші для рівняння (1).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* α_1 *і* α_6, B — *деяке додатне число,* b_l, $l \in \{1,2,3\}$, — *деякі невід'ємні числа. Тоді розв'язок* u *рівняння* (1), *що задовольняє нульову початкову умову та умову*

$$|u(t,x)| \leqslant B\exp\left\{\sum_{l=1}^{3} b_l|x_l|^2\right\}, \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

тотожно дорівнює нулю.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* α_1*–*α_4 *і нехай* b *— деяке невід'ємне число. Тоді розв'язок* u *рівняння* (1), *який задовольняє нульову початкову умову та умову*

$$\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-b|x|^2\}|u(t,x)|dx < \infty,$$

тотожно дорівнює нулю.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* α_1*–*α_4*. Тоді задача Коші для рівняння* (1) *не може мати більше одного невід'ємного розв'язку.*

1. *Івасишен С. Д., Лаюк В. В.* Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 56–65.
2. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Operator Theory: Adv. and Appl. Vol. 152).
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 635 с.
4. *Di Francesco M., Pascucci A.* On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Appl. Math. Res. Express. – 2005. – No 3. – P. 77–116.
5. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov–Fokker–Planck type // Matematiche. – 1994. – **49**. – P. 53–105.
6. *Малицька Г. П.* Про принцип максимуму для ультрапараболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 195–2001.
7. *Дронь В. С.* Про принцип максимуму для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – Вип. 12. – С. 272–277.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів

Надійшло до редакції 14.07.2008

V. V. Layuk

Properties of solutions of one class of ultraparabolic equations

Ultraparabolic equations which generalized the classical Kolmogorov equation of diffusion with inertia that arise in the theory of the Markov stochastic processes of diffusion type are considered. For the so-called L-solutions of these equations, some propositions of the principle of maximum type which are applied to study properties of the fundamental solution of the Cauchy problem and to prove the uniqueness theorems for a solution of the Cauchy problem are established.