

Л. В. Назаренко

Деформирование волокнистого материала с ортотропными компонентами при микроповреждаемости волокна

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л. П. Хорошунюм)

Викладається теорія мікропошкодженості волокнистих матеріалів з ортотропними компонентами. Мікроруйнування моделюються порожніми порами. Критерій руйнування в мікрооб'ємі приймається у формі Губера–Мізеса, де границя міцності є випадковою функцією координат з степеневим розподілом або розподілом Вейбулла. Напружено-деформований стан визначається на основі стохастичних рівнянь теорії пружності для матеріалів з ортотропними компонентами. Замикання рівнянь деформування та пошкоджуваності здійснюється на основі рівняння балансу пористості компонентів. Побудовано нелінійні залежності сумісних процесів деформування таких матеріалів від макродеформацій.

1. Теория совместных процессов деформирования и кратковременной микроповреждаемости однородных [1, 2] и композитных материалов с изотропными [3–8] и трансверсально-изотропными компонентами [9] основана на моделировании рассеянных единичных микроповреждений квазисферическими микропорами, пустыми или заполненными частицами разрушенного материала. Это дает возможность описывать деформирование таких материалов на основе механики стохастически неоднородных сред с применением теории эффективных модулей. Описание процесса образования и накопления микроповреждений при нагружении материала базируется на использовании критерия разрушения микрообъема в виде предельного значения определенной комбинации напряжений в микроточке типа Губера–Мизеса или Шлейхера–Надаи [10] и формулировании уравнения баланса разрушенных микрообъемов, исходя из общих свойств функции распределения предела микропрочности микрообъема, являющегося случайной функцией координат. Это дает возможность построить замкнутую систему уравнений, описывающих совместные процессы деформирования и кратковременной микроповреждаемости.

В настоящей работе данная модель обобщается на случай кратковременной повреждаемости волокнистого композитного материала с ортотропными компонентами при микроповреждаемости волокна. Построены нелинейные диаграммы макродеформирования композита.

2. Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную однонаправленными бесконечными волокнами. Предполагается, что компоненты обладают ортотропной симметрией упругих свойств, причем в процессе нагружения в волокне возникают микроповреждения, которые будем моделировать случайно расположенными пустыми микропорами квазисферической формы. Будем считать, что заданы макродеформации ком-

позита $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$, тогда макронапряжения в композите $\langle \sigma_{ij} \rangle$ связаны с ними следующими соотношениями:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (1)$$

Здесь λ_{ijkl}^* — тензор эффективных упругих модулей, который определяется [11] как функция тензора упругих модулей поврежденных компонентов $\lambda_{ijkl}^{[1]}$, $\lambda_{ijkl}^{[2]}$, объемного содержания включений c_1 и параметра, характеризующего эллипсоидальное волокно \bar{t}_2 , т. е.

$$\lambda_{ijkl}^* = \lambda_{ijkl}^*(\lambda_{mnpq}^{[1]}, \lambda_{mnpq}^{[2]}, c_1, \bar{t}_2), \quad (2)$$

$$\bar{t}_2 = \frac{t_2}{t_1},$$

где t_1, t_2 — размеры полуосей эллипсоида в направлении осей x_1, x_2 ; индексы 1 и 2 сверху обозначают соответственно включения и матрицу.

Тензоры модулей упругости поврежденных компонентов $\lambda_{mnpq}^{[1]}$, $\lambda_{mnpq}^{[2]}$ определяются [12] через тензоры модулей упругости скелетов компонентов λ_{ijkl}^1 , λ_{ijkl}^2 и их пористости p_1, p_2 , характеризующие поврежденность, т. е.:

$$\lambda_{mnpq}^{[1]} = \lambda_{mnpq}^{[1]}(\lambda_{ijkl}^1, p_1), \quad (3)$$

$$\lambda_{mnpq}^{[2]} = \lambda_{mnpq}^{[2]}(\lambda_{ijkl}^2, p_2).$$

Зная эффективные модули упругости и макродеформации композита, мы можем определить деформации в волокне композита посредством соотношений

$$\langle \varepsilon_{kl}|_1 \rangle = \left(I_{klpq} + \frac{1}{c_1} (\lambda_{klmn}^* - \langle \lambda_{klmn} \rangle) (\lambda_{mnpq}^{[3]})^{-1} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (4)$$

Здесь

$$\langle \lambda_{klmn} \rangle = c_1 \lambda_{klmn}^{[1]} + c_2 \lambda_{klmn}^{[2]}; \quad (5)$$

$$\lambda_{mnpq}^{[3]} = \lambda_{mnpq}^{[1]} - \lambda_{mnpq}^{[2]}.$$

Средние напряжения в волокне $\langle \sigma_{ij}|_1 \rangle$ связаны с его средними деформациями $\langle \varepsilon_{kl}|_1 \rangle$ следующим образом:

$$\langle \sigma_{ij}|_1 \rangle = \lambda_{ijkl}^{[1]} \langle \varepsilon_{kl}|_1 \rangle. \quad (6)$$

Средние по скелету волокна напряжения $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle$ связаны со средними напряжениями $\langle \sigma_{ij}|_1 \rangle$ зависимостями

$$\langle \sigma_{ij}^1 \rangle = \frac{1}{1 - p_{01}} \langle \sigma_{ij}|_1 \rangle, \quad (7)$$

где p_{01} — начальная пористость волокна, и тогда на основании (1), (4)–(6) средние по скелету волокна напряжения $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle$ могут быть определены через макродеформации всего композита:

$$\langle \sigma_{ij}^1 \rangle = \frac{1}{1 - p_{01}} \lambda_{ijmn}^{[1]} \left(I_{klpq} + \frac{1}{c_1} (\lambda_{klmn}^* - \langle \lambda_{klmn} \rangle) (\lambda_{mnpq}^{[3]})^{-1} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (8)$$

Для случая, когда процесс накопления повреждений происходит в волокнах, примем критерий кратковременного разрушения в микрообъеме неповрежденной части материала матрицы в форме Губера–Мизеса [9]

$$I_{\langle\sigma\rangle}^1 = (\langle\sigma_{ij}^1\rangle' \langle\sigma_{ij}^1\rangle') = k_1, \quad (9)$$

где $\langle\sigma_{ij}^1\rangle'$ — девиатор средних по неповрежденной части материала волокна напряжений; k_1 — предельное значение инварианта $I_{\langle\sigma\rangle}^1$, являющееся случайной функцией координат.

Одноточечную функцию распределения $F(k_1)$ параметра k_1 можно описывать экспоненциально-степенным законом на полубесконечном интервале распределением Вейбулла [1]:

$$F(k_1) = \begin{cases} 0, & k_1 < k_{01}, \\ 1 - \exp(-m_1(k_1 - k_{01})^{\alpha_1}), & k_1 \geq k_{01}. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь k_{01} — минимальная величина предельного значения k_1 , с которого начинается разрушение в некоторых микрообъемах материала волокон; m_1, α_1 — постоянные, характеризующие разброс микропрочности в материале.

Примем, что случайное поле предела микропрочности k_1 является статистически однородным, что характерно для реальных материалов, а размеры единичных микроразрушений и расстояний между ними пренебрежимо малы по сравнению с размерами рассматриваемого макрообъема материала. Тогда имеет место свойство эргодичности, согласно которому функция распределения $F(k_1)$ определяет относительное содержание неразрушенной части материала волокна, где предел микропрочности меньше соответствующего значения k_1 . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle\sigma_{ij}^1\rangle$ функция $I_{\langle\sigma\rangle}^1$ определяет, согласно (8), (9), относительное содержание мгновенно разрушенных микрообъемов материала волокна. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, принимая начальную пористость волокна равной p_{01} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов [1]:

$$p = p_{01} + F(I_{\langle\sigma\rangle}^1)(1 - p_{01}). \quad (11)$$

Тогда на основании уравнений (1)–(10) напряжения по скелету волокна $\langle\sigma_{ij}^1\rangle$ могут быть определены через макродеформации всего композита $\langle\varepsilon_{kl}\rangle$. Подставляя (8) в (10), получаем систему уравнений для определения пористости волокна p_1 , как функции макродеформаций:

$$p_1 = p_1(\langle\varepsilon_{kl}\rangle). \quad (12)$$

Подставляя затем p_1 вместо p_{01} в уравнения (2)–(9), получаем нелинейные зависимости между макронапряжениями $\langle\sigma_{ij}\rangle$ и макродеформациями $\langle\varepsilon_{kl}\rangle$ композита.

3. Итерационную схему решения трансцендентного уравнения, которое описывается соотношениями (1)–(10), можно представить следующим образом:

пористость волокна в n -м приближении $p_1^{(n)}$ связана с предельным значением интенсивности средних касательных напряжений в каркасе материала в n -м приближении

$k_1^{(n)}$, т.е. с интенсивностью средних касательных напряжений скелета в n -м приближении $I_{\langle\sigma\rangle}^{1(n)}$;

интенсивность средних касательных напряжений скелета связана с текущей пористостью матрицы в $(n-1)$ -м приближении $p_1^{(n-1)}$, эффективными упругими модулями всего композита в $(n-1)$ -м приближении $\lambda_{ij}^{*(n-1)}$ и макродеформациями $\langle\varepsilon_{kl}\rangle$, согласно соотношениям (4)–(9);

эффективные упругие модули также связаны с текущей пористостью матрицы в $(n-1)$ -м приближении $p_1^{(n-1)}$ в соответствии с формулами (2), (3).

Таким образом, на основании выражений (11) находим

$$p_1^{(n)} = p_{01} + (1 - p_{01})F(k_1^{(n)}), \quad (13)$$

где $k_1^{(n)}$ определяется соотношением

$$k_1^{(n)} = I_{\langle\sigma\rangle}^{1(n)}. \quad (14)$$

Здесь принимаем распределение Вейбулла

$$F(k_1^{(n)}) = \begin{cases} 0, & k_1^{(n)} < k_{01}, \\ 1 - \exp(-m_1(k_1^{(n)} - k_{01})^{\alpha_1}), & k_1^{(n)} \geq k_{01}. \end{cases} \quad (15)$$

Согласно соотношениям (4)–(8), имеем

$$I_{\langle\sigma\rangle}^{1(n)} = I_{\langle\sigma\rangle}^{1(n)}(\lambda_{ijkl}^{*(n-1)}, p_1^{(n-1)}, \langle\varepsilon_{kl}\rangle), \quad (16)$$

причем из соотношений (2)–(10) следует

$$\lambda_{ijkl}^{*(n-1)} = \lambda_{ijkl}^*(\lambda_{mnpq}^1, \lambda_{mnpq}^2, c_1, p_1^{(n-1)}, \bar{t}_2). \quad (17)$$

Таким образом, уравнения (2)–(16) позволяют определить эффективные упругие характеристики изотропного материала, армированного бесконечными ортотропными волокнами в зависимости от макродеформаций, согласно равенству

$$\lambda_{ijkl}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{ijkl}^{*(n)}. \quad (18)$$

Задавая макродеформации, которым подвергается материал, и определив его эффективные упругие характеристики, на основании выражений (1)–(10) можно вычислить макро-напряжения.

4. Используя изложенную методику и полученные соотношения баланса пористости, в качестве примера, построим нелинейную диаграмму макродеформирования и исследуем поведение композита на основе изотропной матрицы с ортотропными эллипсоидальными волокнами для одноосного растяжения

$$\langle\varepsilon_{33}\rangle \neq 0.$$

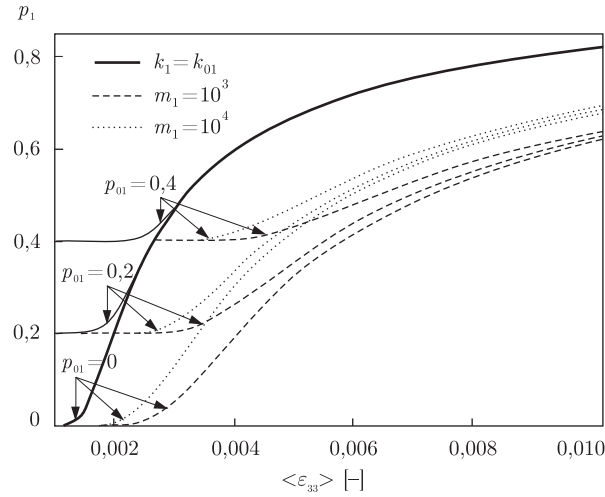


Рис. 1. Зависимости повреждаемости p_1 от макродеформации $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ в волокнистом ортотропном композите при микроразрушениях волокна и различных значениях параметра m_1 функции прочности $F(k_1)$ и начальной пористости волокна p_{01}

Рассмотрим случай, когда накопление повреждений происходит в волокне рассматриваемого композитного материала. В качестве включений и матрицы взяты соответственно топаз и эпоксидная смола с характеристиками неповрежденной части

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11}^1 &= 287 \text{ ГПа}, & \lambda_{22}^1 &= 365 \text{ ГПа}, & \lambda_{33}^1 &= 300 \text{ ГПа}, \\
 \lambda_{23}^1 &= 90 \text{ ГПа}, & \lambda_{13}^1 &= 85 \text{ ГПа}, & \lambda_{12}^1 &= 128 \text{ ГПа}, \\
 \lambda_{44}^1 &= 110 \text{ ГПа}, & \lambda_{55}^1 &= 135 \text{ ГПа}, & \lambda_{66}^1 &= 133 \text{ ГПа}, \\
 E_2 &= 3 \text{ ГПа}, & \nu_2 &= 0,35,
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

объемной концентрации включений, начальных пор в матрице и форме эллипсоидального волокна

$$c_1 = 0,6, \quad p_{01} = 0; 0,2; 0,4, \quad \bar{t}_2 = 2,$$

при заданных параметрах функции распределения микропрочности волокна

$$\alpha_1 = 6, \quad m_1 = 10^3; 10^4, \quad k_{01} = 0,4 \text{ ГПа}.$$

На рис. 1, 2 показаны кривые зависимостей соответственно повреждаемости p_1 от макродеформации $\langle \varepsilon_{33} \rangle$, макронапряжений $\langle \sigma_{11} \rangle$, $\langle \sigma_{22} \rangle$ и $\langle \sigma_{33} \rangle$ от макродеформации $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ для различных значений параметров p_{01} и m_1 , а также без учета разброса микропрочности (предполагается, что k_1 является постоянной величиной, равной k_{01}). Сплошной линией обозначены кривые, не учитывающие разброс микропрочности, штриховой — кривые, учитывающие разброс микропрочности с параметрами $\alpha_1 = 6$, $m_1 = 10^3$, пунктирной линией — кривые, учитывающие разброс микропрочности с параметрами $\alpha_1 = 6$, $m_1 = 10^4$. До момента возникновения повреждений все три кривые совпадают. Из графиков видно, что кривые, учитывающие разброс микропрочности, являются более гладкими, без изломов, причем, варьируя параметры m_1 и α_1 для каждого конкретного материала, теоретическую кривую макродеформирования можно максимально приблизить к экспериментальной. Кроме того,

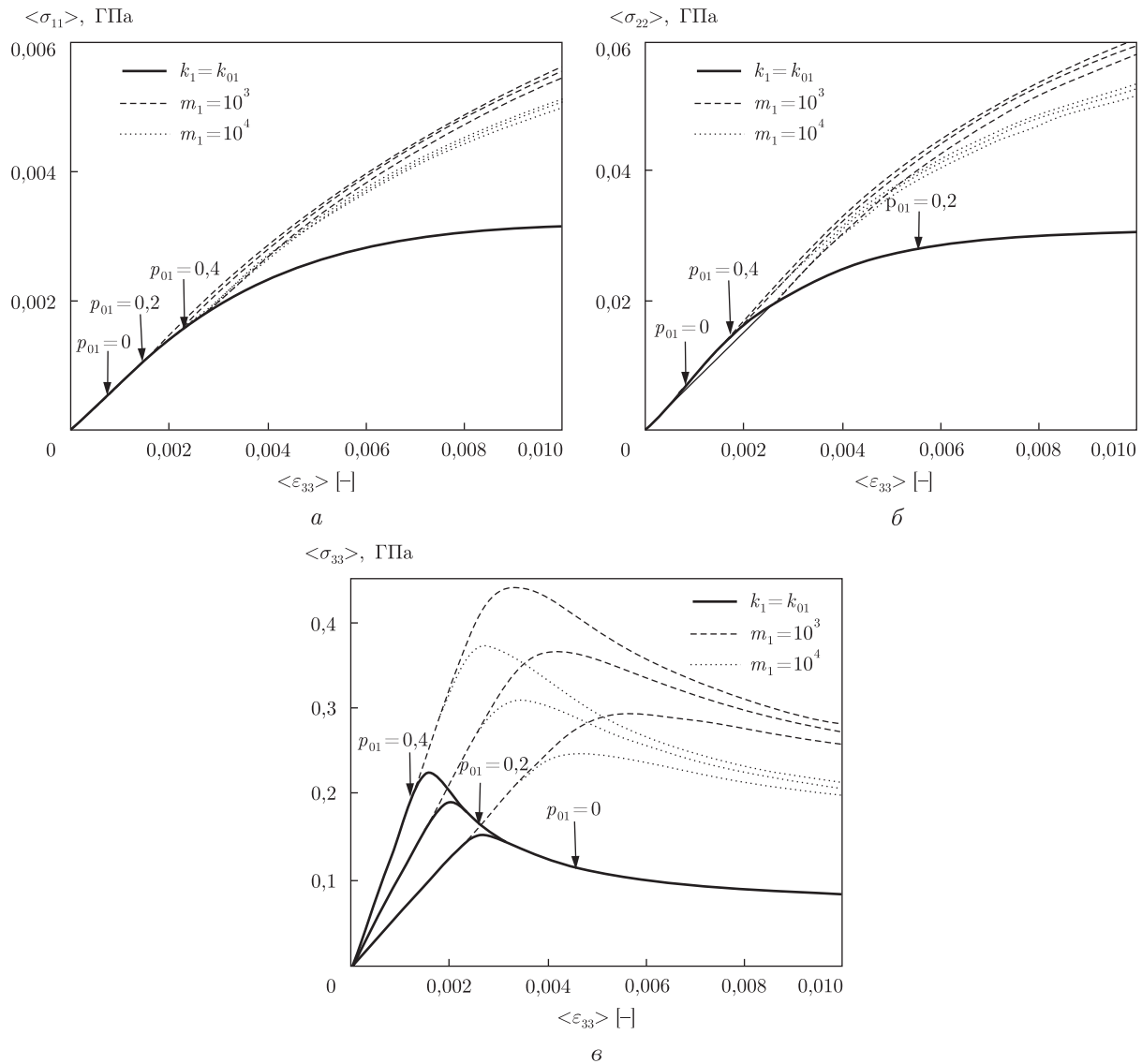


Рис. 2. Зависимости макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ (а), $\langle \sigma_{22} \rangle$ (б), $\langle \sigma_{33} \rangle$ (в) от макродеформации $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ в волокнистом ортотропном композите при микроразрушениях волокна и различных значениях параметра m_1 функции прочности $F(k_1)$ и начальной пористости волокна p_{01}

из графиков также видно, что кривые, полученные без учета разброса микропрочности, не учитывают влияния начальной пористости p_{01} на поведение материала после начала образования микротрещин. Из рисунков также следует, что диаграммы макродеформирования, в которых учитывался разброс микропрочности, существенно зависят от начальной пористости.

1. Khoroshun L. P. Principles of the micromechanics of material damage. 1. Short-term damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, No 10. – P. 120–127.
2. Khoroshun L. P., Nazarenko L. V. Model of short-term damaging of transversally isotropic materials // Ibid. – 2001. – **37**, No 1. – P. 74–83.
3. Desrumaux F., Meraghni F., Benzeggagh L. Generalised Mori–Tanaka scheme to model anisotropic damage using numerical eshelby tensor // J. of Composite Material. – 2001. – **35**, No 7. – P. 603–623.

4. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* Deformation of composite material under microdestructions // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, No 6. – P. 52–58.
5. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* Effect of the spread of strength characteristics on the deformation of granular composite under microdestructions // *Ibid.* – 1997. – **33**, No 8. – P. 39–45.
6. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* To theory of short-term microdestructions of composite materials of granular structure under temperature influences // *Ibid.* – 2002. – **38**, No 1. – P. 79–87.
7. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* Short-term microdestructions of fibrous materials with transversally isotropic fibers under temperature influences // *Ibid.* – 2002. – **38**, No 6. – P. 74–83.
8. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* Short-term microdamageability of a fibrous composites with physically nonlinear matrix and microdamaged reinforcement // *Ibid.* – 2006. – **42**, No 2. – P. 127–135.
9. *Khoroshun L. P., Nazarenko L. V.* Deformation and microdamaging of discretely-fibrous composites with transversally-isotropic components // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, No 6. – P. 696–703.
10. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 311 с.
11. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикула Е. Н., Назаренко Л. В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: в 12-ти т. Т. 3).
12. *Nazarenko L. V.* Thermoelastic properties of orthotropic porous materials // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, No 2. – P. 114–122.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 04.08.2008

L. V. Nazarenko

Deformation of fibrous materials with orthotropic components under fiber microdamages

A model of nonlinear deformation of stochastic composites under microdamaging is developed for the case of a fibrous composite with orthotropic components, when the microdamages are accumulated in fibers. Fractured microvolumes are modeled by a system of randomly distributed quasispherical pores. The porosity balance equation and relations for determining the effective elastic moduli in the case of orthotropic components are taken as basic relations. The fracture criterion is assumed to be given as the limit value of the intensity of average shear stresses occurring in the undamaged part of the material. Using the numerical solution, the nonlinear stress-strain diagrams for an orthotropic composite in the case of uniaxial tension are obtained.