

М. Л. Миронцов

Практичне застосування неітераційного методу розв'язання рівняння Фредгольма першого роду до задач геофізики

(Представлено академіком НАН України В. І. Старостенком)

Розглянуто можливість ефективного використання неітераційного методу, заснованого на теоремі про згортку й на знаходженні шуканої функції у вигляді ряду Фур'є, що дає змогу знаходити розв'язок рівняння Фредгольма першого роду типу згортки.

Розв'язання рівняння Фредгольма першого роду є класичною некоректною задачею [1, 2], тому для її розв'язання використовують методи регуляризації [3, 4]. Розглянемо задачу встановлення в деякій області L функції $g(\vec{r})$, де \vec{r} — вектор n вимірного простору, за даними виміру $f(\vec{r})$, якщо відомо, що функції пов'язані між собою рівнянням Фредгольма першого роду з ядром K :

$$f(\vec{r}) = \int_L K(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot g(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (1)$$

При позначенні коефіцієнтів представлення функцій f , g , σ комплексним n -вимірним рядом Фур'є як f_{i_1, \dots, i_n} , g_{i_1, \dots, i_n} , σ_{i_1, \dots, i_n} відповідно і, використовуючи теорему про згортку [5, 6] для ряду, можна стверджувати, що:

$$g_{i_1, \dots, i_n} = \frac{f_{i_1, \dots, i_n}}{\sigma_{i_1, \dots, i_n}^*}. \quad (2)$$

Позначимо g' знайдений ряд Фур'є обмеженої кількості членів, розрахованих за формулою (2), продемонструємо застосування цього методу до розв'язання актуальних задач геофізики. В цьому методі є лише один параметр, який можна змінювати і від якого залежить розв'язок: це кількість членів ряду Фур'є. Вибір значення цього параметра є очевидним і залежить від метрики, в якій розв'язується задача. За аналогією з іншими методами регуляризації його можна називати параметром регуляризації. Ми будемо використовувати метрику L_1 та обирати кількість членів ряду з умови:

$$\int_L \left| f(\vec{r}) - \int_L K(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot g(\vec{r}') d\vec{r}' \right| \cdot d\vec{r} \rightarrow \min.$$

Під 1D задачею будемо розуміти задачу, де шукана функція залежить від однієї скалярної змінної, під 2D задачею, відповідно якщо шукана функція залежить від двох скалярних змінних.

1D задача. Для одновимірного випадку (1) набуватиме вигляду:

$$f(x) = \int_L K(x' - x) \cdot g(x) \cdot dx',$$

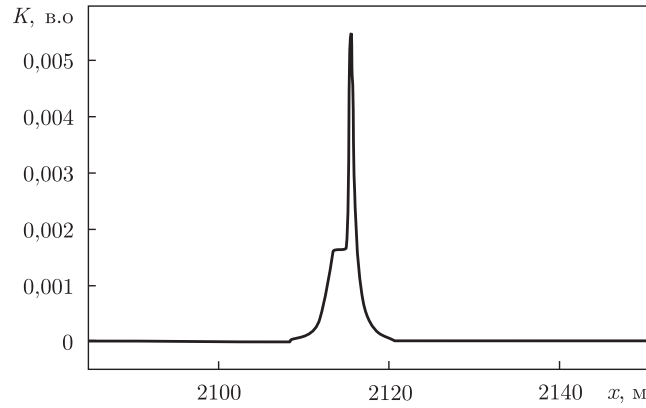


Рис. 1. Геометричний фактор зонда індукційного каротажу I2.05

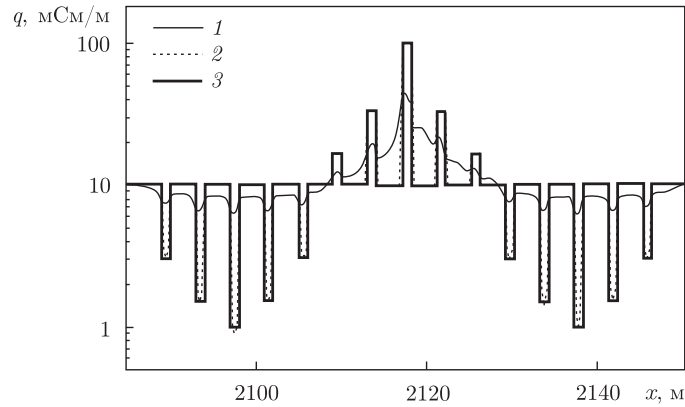


Рис. 2. Розв'язок 1D. Провідність: 1 — виміряна уявна; 2 — знайдена; 3 — питома (результат розв'язку оберненої задачі для знайденої уявної провідності)

яке, наприклад, пов'язує виміряну уявну провідність деяким зондом індукційного каротажу з геометричним фактором K [7]. На рис. 1 наведено графік функції геометричного фактора, широко застосовного на практиці зонда I2.05 [8], для цього зонда на рис. 2 зображено графіки отриманої чисельно функції виміряної уявної провідності для заданого розподілу питомої провідності (пачка пластів різної питомої провідності щільністю 1 м відділених прошарками завтовшки 3 м провідністю 10 мСм/м) та графік значень ряду Фур'є з коефіцієнтами, розрахованими за формулою (2).

2D задача. Для двовимірного випадку розглянемо поширене в задачах гравіметрії та магнітометрії рівняння вигляду:

$$f(x, y) = \int_L \frac{zg(x, y) dx' dy'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3)$$

яке пов'язує, наприклад, виміряну аномалію поля f для заданого розподілу невідомих мас (зарядів) g на площині, віддаленій від площини виміру на відстань z [9, 10]. Для моделі, яка складається з квадратної аномалії густиною 10 в.о., має квадратну форму в площині XU (розміром 100×100 в.о.) відстані та знаходиться в нескінченному просторі густини, що дорівнює 1 в.о., та виміру на площині, віддаленій від площини розташування аномалії на 10 в.о. ($z = 10$), на рис. 3 наведено графіки ядра рівняння (3),

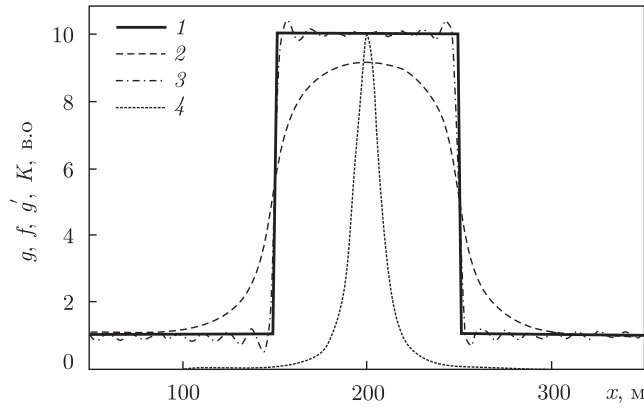


Рис. 3. Дані для 2D задачі (опис моделі див. у тексті): 1 — розподіл густини; 2 — аномальне поле (результат розв’язку прямої задачі для заданої питомої провідності); 3 — знайдена густина (результат розв’язку оберненої задачі для знайденої уявної провідності); 4 — ядро рівняння

отриманої чисельно функції аномального поля, заданого розподілу мас та знайденого ряду з коефіцієнтами, розрахованими за формулою (2). Для зручності порівняння — дані наведено для перерізу (графіки ядра та аномального поля нормовані для можливого порівняння з графіками заданої та обчисленої густини), що проходить через центр аномалії.

Необхідно пам’ятати про можливість виникнення ситуації, коли для деяких членів ряду $|\sigma_{i_1, \dots, i_n}| = 0$ відповідні члени необхідно відкидати або змінювати (навіть незначним чином) межі області L . Крім того, для випадку кусково-сталюї функції g в околі точок розриву обчислений ряд з коефіцієнтами (2) буде мати особливість Гібса [11]. Тому для наведених прикладів для отриманих рядів було застосовано багаторазову процедуру “згладжування”. Вибір необхідної кількості повторення процедури залежить від кількості членів ряду, які використовуються при обчисленні ряду, та від співвідношення характерних розмірів шуканих особливостей функції g та кроку, з яким проводиться вимір f . Для збереження точності в наведених прикладах при використанні k -кратної процедури “згладжування” функція f була довізначена в $k - 1$ точках (по кожній з координат у випадку 2D), що рівномірно розташовані між сусідніми точками виміру.

Принаймні для розв’язку задачі індукційного каротажу даний метод був описаний, проте наведені результати [12, 13], навіть для простіших модельних задач, значно відрізняються за точністю від представлених в цій роботі. Це можна пояснити значними обчислювальними ресурсами, необхідними для знаходження і представлення розв’язку, які стали широкодоступними лише в останні роки, хоча навіть при сучасному розвитку обчислювальної техніки практичне використання методу вже для 2D задач вимагає значного часу числового розрахунку.

Таким чином, можна стверджувати, що метод, заснований на знаходженні шуканої функції у вигляді ряду Фур’є, дозволяє розв’язувати рівняння Фредгольма типу згортки і точно (у межах похибки, визначеної точністю числового інтегрування, кількістю членів ряду тощо) розв’язувати задачі геофізики, засновані на використанні цього інтегрального рівняння.

Автор висловлює глибоку вдячність академіку НАН України В. І. Старостенку за увагу до викладених матеріалів та конструктивні зауваження.

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1979. – 284 с.
2. Старостенко В. И., Оганесян С. М. Некорректно поставленные задачи по Адамару и их приближенное решение методом регуляризации А. Н. Тихонова // Геофиз. журн. – 2001. – 23. – С. 3–20.
3. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1990. – 320 с.
4. Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – Киев: Наук. думка, 1973. – 111 с.
5. Свертка // Математическая энциклопедия. Т. 4 / Под ред. И. М. Виноградова. – Москва: Сов. энциклопедия, 1984. – 1216 с.
6. Страхов В. Н. О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральным уравнением типа свертки. 1 // Физика Земли. – 1967. – № 4. – С. 36–54.
7. Кауфман А. А. Теория индукционного каротажа. – Москва: Наука, 1965. – 236 с.
8. Девяцин В. А., Казан Г. Я., Пантюхин В. А. и др. Многозондовые комплексы индукционного каротажа // НТВ Каротажник. – 1997. – № 30. – С. 24–32.
9. Дор Г. Введение в прикладную геофизику. – Москва: Недра, 1984. – 237 с.
10. Гладкий К. В. Гравиразведка и магниторазведка. – Москва: Недра, 1967. – 321 с.
11. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 2. – Москва: Наука, 1973. – 392 с.
12. Anderson B. I. Barber T. D. Induction Logging. – Paris: Schlumberger, 1996. – 45 p.
13. Anderson B. I. Modeling and inversion methods for the interpretation of resistivity logging tool response. – Paris: Schlumberge print, 2001. – 377 p.

ВАТ Дослідно-конструкторське бюро геофізичного приладобудування, Київ

Надійшло до редакції 11.09.2008

M. L. Myrontsov

Practical application of the non-iteration method for solution of the Fredholm equation of the first kind to geophysical problems

The possibility to use efficiently the non-iteration method permitting to find a solution of the Fredholm equation of the first kind of the convolution type based on the convolution theorem and the Fourier transformation is considered.