УДК 517.538.5

Я. В. Новак

Критерій існування неперервних похідних у функцій з класу L_p на відрізку в термінах локальних наближень найпростішими дробами

(Представлено членом-кореспондентом НАН України П. М. Тамразовим)

Доведено теорему про локальне найкраще наближення найпростішими дробами, тобто логарифмічними похідними алгебраїчних многочленів з комплексними коефіцієнтами. У теоремі одержано аналог відомої теореми Морозова про опис функцій, n разів неперервно диференційовних на відрізку $\Delta \subset \mathbb{R}$, у термінах локальних наближень у метриці простору L_p, $p \in [1, \infty)$, алгебраїчними многочленами.

Найпростішим дробом степеня n (термін запропоновано Є. П. Долженком) називається раціональна функція вигляду

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k}, \qquad \{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C} \qquad (n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}).$$

Як апарат наближення найпростіші дроби активно досліджуються з 1999 р., коли В. І. та Д. Я. Данченки (див. [1]) встановили можливість рівномірного наближення з довільною точністю найпростішими дробами кожної комплексної функції, неперервної на заданому компакті і аналітичної в його внутрішніх точках, за умови, що даний компакт не розбиває площини (аналог відомої теореми Мергеляна). Деякі інші задачі теорії рівномірного наближення найпростішими дробами вивчались у роботах [2–4] (див. також список літератури у цих роботах). Зокрема, в [2] встановлено аналог відомої теореми Джексона про наближення неперервних на відрізку функцій із заданим модулем неперервності, а в [3] доведена можливість наближення найпростішими дробами функцій, неперервних на дійсній прямій $\mathbb{R}$, які зникають на нескінченності.

Дослідження диференціально-різницевих властивостей неперервних на відрізку функцій, які мають степеневу швидкість локальних наближень у метриці L_p ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) найпростішими дробами заданого степеня [5] показало, що залежно від показника степеня, який визначає швидкість таких наближень, функція, що наближається, може бути або найпростішим дробом, або належати класу Гельдера–Зігмунда певного порядку.

У даній роботі в термінах локальних наближень найпростішими дробами отримано критерій належності функцій, сумовних із заданим степенем на відрізку дійсної осі, до класу n разів неперервно диференційовних функцій на цьому відрізку. Подібний критерій у термінах локальних наближень алгебраїчними поліномами був раніше отриманий А. Н. Морозовим [6].

Означення та позначення. Через $\mathbf{SR}_n$ ми позначаємо множину всіх найпростіших дробів степеня не вище n; при $n = 0$, за означенням, ця множина містить у собі єдину функцію, тотожно рівну нулеві. Нехай $\Delta = [a, b]$ — фіксований відрізок дійсної осі. Далі ми розглядаємо вимірні функції, задані на відрізку Δ зі значеннями в $\mathbb{C}$. Якщо $1 \leqslant p < \infty$, то $L_p(\Delta)$ — (лінійний) простір усіх функцій f, інтегровних за Лебегом у степені p на Δ, з нормою $\|f\|_{p,\Delta} := \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Через $\rho_n(f;\Delta)_p := \inf\{\|f - r_n\|_{p,\Delta} : r_n \in \mathbf{SR}_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ позначимо найкраще наближення функції $f \in L_p(\Delta)$ найпростішими дробами степеня не вище n у метриці простору $L_p(\Delta)$. Ця величина завжди скінченна і обмежена зверху числом $\|f\|_{p,\Delta}$, оскільки як найпростіший дріб, що наближає функцію f, можна взяти тотожний нуль. Замінивши в означенні величини $\rho_n(f;\Delta)_p$ множину $\mathbf{SR}_n$ на множину $\mathbf{P}_n$ усіх алгебраїчних многочленів степеня не вище n, отримаємо величину $E_n(f;\Delta)_p$.

Нехай $C(\Delta)$ — лінійний простір неперервних на відрізку Δ функцій f з нормою $\|f\|_\Delta = \max\limits_{t\in\Delta} |f(t)|$, $C^n(\Delta)$ — множина n разів неперервно диференційовних функцій на відрізку Δ. Всюди нижче $I := [\alpha, \beta] \subset \Delta$ $(\alpha < \beta)$, $C_1(r) := ((1 + r)e^r)^{-1}$, $C_2^{(\theta)}(r) := (1 + (2 + \theta)re^{(1+\theta)r})e^r$ $(r,\ \theta \in \mathbb{R},\ r \geqslant 0,\ \theta \geqslant 0)$, $x \in I$, $d := \max\{\beta - x, x - \alpha\}$, $p' := p/(p - 1)$. Для функції f, інтегровної на відрізку $I = [\alpha, \beta]$, покладемо $\alpha(f, x; t) := \int\limits_x^t f(\tau)d\tau$. Функція $\alpha(f, x; t)$, очевидно, належить простору $C(I)$.

Допоміжні твердження. У 1940 р. С. Н. Бернштейн [7] отримав критерій наявності у функції $f \in C(\Delta)$ певної кількості неперервних похідних на відрізку Δ. Нижченаведена теорема Морозова [6] є перенесенням результату Бернштейна на випадок функцій, сумовних із степенем p, $1 \leqslant p < \infty$.

Теорема А. *Для того щоб функція $f(t) \in L_p(\Delta)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ належала класу $C^n(\Delta)$, необхідно і достатньо, щоб рівномірно за x при α, $\beta \to x$ була справедливою така умова:*

$$E_{n-1}(f; [\alpha, \beta])_p(\beta - \alpha)^{-(n+1/p)} \to \lambda(x), \qquad a \leqslant \alpha < x < \beta \leqslant b,$$

де λ — деяка функція з $C(\Delta)$; якщо ця умова виконується, то має місце рівність $c_{n,p}^{-1}\lambda(x) \equiv |f^{(n)}(x)|$, де $c_{n,p} := E_{n-1}(x^n/n!; [0, 1])_p$.

Лема 1. *Нехай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\theta \geqslant 0$, f, $g \in L_p(I)$, $G(x) = 1 + \alpha(g; x)$, $\delta := \|g - fe^{\alpha(f;\cdot)}\|_{p,I}$, $\varepsilon := \|g/G - f\|_{p,I}$, $\eta := \delta d^{1/p'} \cdot e^{d^{1/p'}\|f\|_{p,I}} < 1$. Тоді:*

(a) $\varepsilon \leqslant ((1 - \eta)C_1(d^{1/p'}\|f\|_{p,I}))^{-1} \cdot \delta$;

(b) $\delta \leqslant C_2^{(\theta)}(d^{1/p'}\|f\|_{p,I}) \cdot \varepsilon$ при $\varepsilon \leqslant (1 + \theta)\|f\|_{p,I}$.

Доведення. Ми використовуємо позначення та ідеї роботи [4]. Для зручності введемо скорочене позначення $\|\cdot\|_{p,I} = \|\cdot\|_p$.

Для доведення нерівності (a) скористаємося тим, що $\|G - e^\alpha\| = \|\alpha(g - fe^\alpha; \cdot)\| \leqslant d^{1/p'}\delta$, а також тим, що при $t \in I$ виконується нерівність $|G(t)| \geqslant |e^{\alpha(t)}| - |G(t) - e^{\alpha(t)}|$. Будемо мати

$$\varepsilon = \left\|f - \frac{g}{G}\right\|_p = \left\|\frac{fG - g}{G}\right\|_p \leqslant \|fG - g\|_p \left\|\frac{1}{G}\right\| \leqslant (\|fG - fe^\alpha\|_p + \|fe^\alpha - g\|_p)\left\|\frac{1}{G}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|fG - fe^\alpha\|_p + \|fe^\alpha - g\|_p}{\min\limits_{t\in[\alpha,\beta]}\{|e^{\alpha(t)}|\} - \|G - e^\alpha\|} \leqslant \frac{\|f\|_p d^{1/p'}\delta + \delta}{\min\limits_{t\in[\alpha,\beta]}\{|e^{\alpha(t)}|\} - d^{1/p'}\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1 + d^{1/p'}\|f\|_p)\delta}{e^{-d^{1/p'}\|f\|_p} - d^{1/p'}\delta} \leqslant (1 - \eta)^{-1}e^{d^{1/p'}\|f\|_p}(1 + d^{1/p'}\|f\|_p)\delta.$$

Тобто справедлива нерівність (a).

Нижче нам будуть потрібні такі очевидні нерівності: $\|\alpha\| \leqslant d^{1/p'}\|f\|_p$, $\|\alpha(g/G;\cdot)\| \leqslant \leqslant d^{1/p'}\|g/G\|_p \leqslant d^{1/p'}(\|f\|_p + \varepsilon)$. Щоб отримати першу з них, скористаємось інтегральною нерівністю Гельдера для функцій $1 \in L_{p'}$ та $f \in L_p$:

$$\|\alpha\| = \max_{t\in I}\left|\int\limits_0^t (1\cdot f(\tau))d\tau\right| \leqslant \max_{t\in I}\left|\int\limits_0^t |1|^{p'}d\tau\right|^{1/p'}\left|\int\limits_0^t |f(\tau)|^p d\tau\right|^{1/p} \leqslant d^{1/p'}\left|\int\limits_{-d}^d |f(\tau)|^p d\tau\right|^{1/p} =$$

$$= d^{1/p'}\|f\|_p.$$

Для доведення другої з них, крім нерівності Гельдера, потрібно також скористатись означенням величини ε і відомою нерівністю трикутника для норм. Використовуючи ці нерівності, одержуємо:

$$\delta = \|g - fe^{\alpha}\|_p = \left\|\frac{g}{G}e^{\alpha(g/G;\cdot)} - fe^{\alpha}\right\|_p \leqslant \left\|\frac{g}{G}e^{\alpha(g/G;\cdot)} - \frac{g}{G}e^{\alpha}\right\|_p + \left\|\frac{g}{G}e^{\alpha} - fe^{\alpha}\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\frac{g}{G}\right\|_p \|e^{\alpha(\cdot)} - e^{\alpha(g/G;\cdot)}\| + \|e^{\alpha}\|\left\|f - \frac{g}{G}\right\|_p \leqslant (\|f\|_p + \varepsilon)\left\|\int\limits_{\alpha(\cdot)}^{\alpha(g/G;\cdot)} e^{\tau}d\tau\right\| + e^{d^{1/p'}\|f\|_p}\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant (\|f\|_p + \varepsilon)\left\|\alpha\left(\frac{g}{G};\cdot\right) - \alpha(\cdot)\right\| e^{\max\{\|\alpha\|,\|\alpha(g/G;\cdot)\|\}} + e^{d^{1/p'}\|f\|_p}\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant (d^{1/p'}(\|f\|_p + \varepsilon)e^{d^{1/p'}(\|f\|_p+\varepsilon)} + e^{d^{1/p'}\|f\|_p})\varepsilon.$$

Якщо $\varepsilon \leqslant (1+\theta)\|f\|_p$, то справедлива нерівність (b).

Лема 2. *Нехай* $1 \leqslant p < \infty$, *функція* $f \in L_p(I) \setminus \mathbf{SR}_{n+1}$,

$$\eta := E_n(fe^{\alpha(f,x;\cdot)})_p d^{1/p'} \exp(d^{1/p'}\|f\|_{p,I}) < 1,$$

$$C_1 = C_1(d^{1/p'}\|f\|_{p,I}), \qquad C_2 = C_2^{(0)}(d^{1/p'}\|f\|_{p,I}), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тоді

$$(1-\eta)C_1(d^{1/p'}\|f\|_{p,I}) \leqslant \frac{E_n(fe^{\alpha(f,x;\cdot)}; I)_p}{\rho_{n+1}(f; I)_p} \leqslant C_2(d^{1/p'}\|f\|_{p,I}).$$

Доведення. Нехай $P_n(z)$ — многочлен степеня не вище n найкращого (у метриці простору L_p) наближення функції $fe^{\alpha} \in L_p$ на I (такий многочлен існує: див., напр., [8, с. 40]). Покладемо $Q_{n+1} := 1 + \alpha(P_n;\cdot)$. Тоді, згідно з лемою 1 з $g \equiv P_n$, матимемо

$$\rho_{n+1}(f)_p \leqslant \left\|\frac{P_n}{Q_{n+1}} - f\right\|_p \leqslant (1-\eta)^{-1}(1 + d^{1/p'}\|f\|_p)e^{d^{1/p'}\|f\|_p}\|P_n - fe^{\alpha}\|_p =$$

$$= (1-\eta)^{-1}(1 + d^{1/p'}\|f\|_p)e^{d^{1/p'}\|f\|_p}E_n(fe^{\alpha})_p.$$

Цим доведена ліва частина потрібної нам подвійної нерівності.

Доведемо праву частину даної нерівності. Згідно з означенням точної нижньої грані, для довільного $\theta > 0$ знайдеться найпростіший дріб $R_{n+1} = P_n(z)/(1 + \alpha(P_n; z))$ степеня не вище $n+1$ такий, що $\rho_{n+1}(f)_p \leqslant \|R_{n+1}-f\|_p \leqslant \rho_{n+1}(f)_p + \theta\|f\|_p$. Оскільки завжди $\rho_{n+1}(f)_p \leqslant \|f\|_p$, то $\varepsilon := \|R_{n+1}-f\|_p \leqslant (1+\theta)\|f\|_p$. Скориставшись лемою 1 для $g \equiv P_n$, одержуємо

$$E_n(fe^{\alpha})_p \leqslant \|P_n - fe^{\alpha}\|_p \leqslant (1+(2+\theta)d^{1/p'}\|f\|_p e^{(1+\theta)d^{1/p'}\|f\|_p})e^{d^{1/p'}\|f\|_p}\|R_{n+1}-f\|_p \leqslant$$

$$\leqslant (1+(2+\theta)d^{1/p'}\|f\|_p e^{(1+\theta)d^{1/p'}\|f\|_p})e^{d^{1/p'}\|f\|_p}(\rho_{n+1}(f)_p + \theta\|f\|_p) =$$

$$= C_2^{(\theta)}(d^{1/p'}\|f\|_p)(\rho_{n+1}(f)_p + \theta\|f\|_p).$$

Остання нерівність справедлива для довільного $\theta > 0$. Враховуючи те, що $C_2^{(0)}(r) = \lim\limits_{\theta\to 0+} C_2^{(\theta)}(r)$ $(r > 0)$, перейдемо в останній рівності до границі при $\theta \to 0+$ і отримаємо праву частину потрібної нам нерівності.

Оскільки при $p > 1$ $C_1(d^{1/p'}\|f\|_{p,I}) \to 1$, $C_2(d^{1/p'}\|f\|_{p,I}) \to 1$, а $\eta = E_n(fe^{\alpha(f,x;\cdot)})_p d^{1/p'} \times \exp(d^{1/p'}\|f\|_{p,I}) \to 0$ при $d \to 0$, то має місце такий результат.

Лема 3. *Нехай $1 < p < \infty$, $f \in L_p(\Delta) \setminus \mathbf{SR}_{n+1}$. Тоді при довільному $x \in \Delta$ виконується рівність*

$$\lim_{\alpha,\beta\to x} \frac{E_n(fe^{\alpha(f,x;\cdot)}; I)_p}{\rho_{n+1}(f;I)_p} = 1.$$

Лема 4 (див. [5]). *Нехай $n \in \mathbb{N}_0$. Функція f належить класу $\mathbf{SR}_{n+1}$ тоді і тільки тоді, коли функція $fe^{\alpha(f;\cdot)}$ є многочленом степеня не вище n.*

Основний результат.

Теорема. *Нехай $1 < p < \infty$. Тоді для того щоб функція $f \in L_p(\Delta)$ належала класу $C^n(\Delta)$, необхідно і достатньо, щоб існувала функція $\lambda \in C(\Delta)$ така, що*

$$\rho_n(f;[\alpha,\beta])_p(\beta-\alpha)^{-(n+1/p)} \to \lambda(x), \qquad a \leqslant \alpha < x < \beta \leqslant b,$$

рівномірно за x при α, $\beta \to x$. Якщо остання умова виконується, то має місце тотожність

$$c_{n,p}^{-1} \cdot \lambda(x) \equiv \left|\frac{d^n}{dt^n}(f(t)e^{\alpha(f,x;t)})_{t=x}\right|, \tag{1}$$

де $c_{n,p} := E_{n-1}(x^n/n!;[0,1])_p$.

Доведення. Випадок $f \in \mathbf{SR}_n$ тривіальний (див. лему 4), тому вважатимемо, що $f \notin \mathbf{SR}_n$. Спочатку зауважимо, що функції $f(t)$ і $fe^{\alpha(f,x;t)}$ строго одночасно належать або не належать класу $C^n(\Delta)$ (див. [4, с. 32]).

Нехай $f \in C^n(\Delta)$, тоді також $fe^{\alpha(f,x;t)} \in C^n(\Delta)$. Застосувавши до останньої функції теорему Морозова, отримаємо, що

$$E_{n-1}(f;I)_p/(\beta-\alpha)^{n+1/p} \to \lambda(x), \qquad a \leqslant \alpha < x < \beta \leqslant b,$$

рівномірно за x при α, $\beta \to x$, де неперервна функція $\lambda(x)$ визначається рівністю (1). Порівнюючи з лемою 3, маємо необхідність умов теореми.

Нехай тепер $\rho_n(f;I)_p/(\beta-\alpha)^{(n+1/p)} \to \lambda(x)$, $a \leqslant \alpha < x < \beta \leqslant b$, рівномірно за x при α, $\beta \to x$, де неперервна функція $\lambda(x)$ визначається рівністю (1). Знову, скориставшись лемою 3, отримаємо справедливість умов теореми Морозова для функції $fe^{\alpha(f,x;t)}$, згідно з якою остання (а разом з нею і сама функція $f(t)$) належить класу $C^n(\Delta)$. Цим доведена достатність умов теореми.

1. *Данченко В. И., Данченко Д. Я.* О приближении наипростейшими дробями // Мат. заметки. – 2001. – **70**, вып. 4. – С. 553–559.
2. *Косухин О. Н.* Об аппроксимационных свойствах наипростейших дробей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. – 2001. – № 4. – С. 54–59.
3. *Бородин П. А., Косухин О. Н.* О приближении наипростейшими дробями на действительной оси // Там же. – 2005. – № 1. – С. 3–8.
4. *Косухин О. Н.* О некоторых нетрадиционных методах приближения, связанных с комплексными полиномами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 2005. – 80 с.
5. *Новак Я. В.* Характеризація класів Гельдера–Зігмунда на відрізку в термінах локальних наближень найпростішими дробами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 239–243.
6. *Морозов А. Н.* Об одном описании пространств дифференцируемых функций // Мат. заметки. – 2001. – **70**, вып. 5. – С. 758–768.
7. *Бернштейн А. Н.* К вопросу о локальном наилучшем приближении функций // Докл. АН СССР. – 1940. – **26**. – С. 839–842.
8. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – Москва: Физматгиз, 1960. – 624 с.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 11.12.2008

Ya. V. Novak

A criterion of the existence of continuous derivatives for functions of the class L_p on a segment in terms of local approximations by the simplest fractions

We prove a theorem on the best local approximation by the simplest fractions, i. e., the logarithmic derivatives of algebraic polynomials with complex coefficients. In the theorem, an analog of the well-known A. N. Morozov's theorem on the description of functions, which are n times continuously differentiable on a segment $\Delta \subset \mathbb{R}$, in terms of the local approximation in the metric of a space L_p, $p \in [1, \infty)$ by algebraic polynomials is obtained.