

А. Я. Григоренко, Т. Л. Ефимова, И. А. Лоза

Об одном подходе к исследованию колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

Для розв'язання осесиметричної задачі про вільні позовжні коливання порожнистих п'єзокерамічних циліндрів, поляризованих по довжині, запропонована ефективна чисельно-аналітична методика, яка базується на комбінації методу сплайн-колокацій у поєднанні з методом покрового пошуку.

Після розділення змінних і застосування методу сплайн-колокацій за позовжньою координатою вихідна двовимірна задача у частинних похідних зводиться до граничної задачі в звичайних диференціальних рівняннях. Отримана задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покрового пошуку.

Широкое использование пьезоэлементов в автоматике и приборостроении началось лишь в начале 60-х годов, когда был освоен промышленный синтез пьезокерамических материалов, обладающих по сравнению с такими естественными материалами как кварц, турмалин, сегнетова соль и др. рядом существенных преимуществ. Возможность придания желаемой формы, более низкая стоимость по сравнению с природными пьезоэлектрическими материалами, высокая чувствительность, повышенная температурная стабильность и т. д. окончательно определило выбор в пользу пьезокерамических материалов. Были созданы новые пьезокерамические твердотельные элементы электроники (резонаторы, линии задержки, пьезокерамические матрицы для запоминающих устройств и т. д.), различные функциональные элементы радиоэлектроники, автоматики, измерительной и вычислительной техники (высокоэффективные источники высокого и низкого напряжений, пьезоприводные устройства широкого назначения с поступательным, вращательным и составными видами движения, пьезокерамические матрицы и запоминающие устройства). Высокая эффективность преобразования электрической энергии в механическую и, наоборот, в соединении с чрезвычайно малыми размерами дают возможность применять эти материалы в нанотехнологиях.

Стремление к наиболее полному учету эффекта взаимодействия механических (акустических) полей с электромагнитными привело к созданию нового научно-технического направления — электроупругости.

Высокие требования, предъявляемые к оценке прочности, стремление к наиболее полному учету реальных процессов, происходящих в пьезокерамических конструктивных материалах, выявление и изучение трехмерных эффектов, которые имеют место в толстостенных элементах, приводят к необходимости учитывать связанность полей (механического и электромагнитного), а также проводить расчеты в пространственной постановке.

Решение динамических задач для толстостенных элементов как пространственных задач теории упругости связано со значительными трудностями, обусловленными сложностью системы исходных дифференциальных уравнений в частных производных, необходимостью удовлетворять краевым условиям на ограничивающих тело поверхностях. Эти трудности

существенно возрастают при условии связанности полей (электрического и поля перемещений и деформаций), а также анизотропии пьезокерамических материалов.

Следует отметить, что в научной литературе известны только отдельные работы о колебаниях пьезокерамических цилиндров конечной длины, выполненные в рамках трехмерной теории упругости [1–5].

В последнее время в задачах вычислительной математики, математической физики и механики для решения подобных задач используется метод, основанный на применении сплайн-функций. Это объясняется преимуществами аппарата сплайн-приближений по сравнению с другими методами. К последним следует отнести следующие: устойчивость сплайнов относительно локальных возмущений, иными словами, поведение сплайна в окрестности точки не влияет на поведение сплайна в целом, как это, например, имеет место при полиномиальном приближении. Высокая сходимость сплайн-интерполяции в отличие от полиномиальной, простота и удобство реализации алгоритмов построения и вычисления сплайнов на персональных компьютерах — несомненные преимущества сплайн-интерполяции. Применение сплайн-функций в различных вариационных, проекционных и других дискретно континуальных методах, позволяет получить ощутимые преимущества по сравнению с использованием классического аппарата многочленов, существенно упростить их численную реализацию, а также получить искомое решение с высокой степенью точности.

Укажем на ряд публикаций, где метод сплайн-аппроксимации использовался для исследования механического поведения пластин и оболочек различной структуры [6–9].

В данной работе исследуются собственные колебания пьезокерамического полого цилиндра с продольной поляризацией пьезокерамического материала. Боковые поверхности цилиндра свободны от внешних воздействий. На торцах цилиндра — жесткая заделка.

Осесимметричные продольные уравнения движения в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_r - 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_z = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

уравнения электростатики:

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r}D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (2)$$

геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}u_r; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}. \quad (3)$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ρ — плотность материала; ω — круговая частота; u_i — компоненты вектора перемещений; D_i — компоненты вектора электрической индукции; E_i — компоненты вектора напряженности электрического поля; φ — электростатический потенциал; ε_{ij} — компоненты тензора деформаций.

Физические соотношения для пьезокерамического материала, поляризованного вдоль оси цилиндра, имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z; \\
\sigma_{\theta\theta} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z; \\
\sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z; \\
\sigma_{\theta z} &= 2c_{55}\varepsilon_{\theta z} - e_{15}E_\theta; \\
\sigma_{rz} &= 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_r; \\
\sigma_{r\theta} &= (c_{11} - c_{12})\varepsilon_{r\theta}; \\
D_r &= 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{11}E_r; \\
D_\theta &= 2e_{15}\varepsilon_{\theta z} + \varepsilon_{11}E_\theta; \\
D_z &= e_{13}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{33}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33}E_z,
\end{aligned} \tag{4}$$

где c_{ij} — компоненты тензора модулей упругости; e_{ij} — компоненты тензора пьезомодулей; ε_{ij} — компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при $r = R_0 \pm h$) задаются следующие:

Поверхности свободны от внешних усилий: $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$ и покрыты тонкими электродами, которые закорочены: $\varphi = 0$.

Торцы цилиндра (при $z = \pm L/2$) жестко заземлены: $\tilde{u}_r = 0$; $\tilde{u}_z = 0$ и свободны от электродов: $D_z = 0$. Здесь R_0 — радиус серединной поверхности цилиндра; h — половина толщины цилиндра; L — длина цилиндра.

Подставив соотношения (3) и (4) в уравнения (1) и (2) и разрешив их относительно $\partial^2\varphi/\partial r^2$, $\partial^2 u_r/\partial r^2$, $\partial^2 u_z/\partial r^2$, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} &= -\frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}; \\
\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= -\frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} u_r - \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{11}} u_r - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}; \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{\Delta_5}{\Delta}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \left(1 + \frac{\Delta_5}{\Delta}\right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \left(\frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon_{11}\Omega^2}{\Delta} u_z\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
\Delta &= e_{15}^2 + c_{55}\varepsilon_{11}; & \Delta_1 &= c_{55}\varepsilon_{33} + e_{33}e_{15}; & \Delta_2 &= c_{55}e_{13} - c_{13}e_{15}; \\
\Delta_3 &= c_{55}e_{33} - c_{33}e_{15}; & \Delta_4 &= e_{15}\varepsilon_{33} - e_{33}\varepsilon_{11}; \\
\Delta_5 &= e_{15}e_{33} + \varepsilon_{11}c_{13}; & \Delta_6 &= e_{33}e_{15} + c_{33}\varepsilon_{11},
\end{aligned} \tag{6}$$

а также введены в рассмотрение безразмерные величины

$$\varepsilon = \frac{h}{R_0}; \quad \Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}, \tag{7}$$

где ω — круговая частота; $\lambda = 10^{10}$ Па; ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Используем метод разделения переменных — функции $\varphi(r, z), \tilde{u}_r(r, z), \tilde{u}_z(r, z)$ ищем в виде

$$\varphi(r, z) = \sum_{i=0}^N v_i(x) \varphi_{2i}(z); \quad u_r(r, z) = \sum_{i=0}^N w_i(x) \varphi_{2i}(z); \quad u_z(r, z) = \sum_{i=0}^N u_i(x) \varphi_{1i}(z). \quad (8)$$

Здесь $x = (r - R_0)/h$; $u_i(x), v_i(x), w_i(x)$ — искомые функции по переменной x ; $\varphi_{ji}(z)$ ($j = 1, 2; i = 0, 1, \dots, N$) — линейные комбинации B -сплайнов на равномерной сетке Δ ; $-L/2 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = L/2$. Принимая во внимание граничные условия на торцах цилиндра при $z = -L/2$ и $z = L/2$, можно заметить, что в систему входят производные от компонент вектора решения не выше второго порядка, следовательно, можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьего порядка.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_j &= [\varphi_{ji}(\xi_k)]; \quad k, i = \overline{0, N}; \quad j = 1, 2; \\ \bar{u} &= [u_0, u_1, \dots, u_N]^T; \quad \bar{v} = [v_0, v_1, \dots, v_N]^T; \\ \bar{w} &= [w_0, w_1, \dots, w_N]^T; \quad (k, l) \in \{(k, l) \mid k, l = \overline{1, 6}\}; \\ \bar{a}_{kl}^T &= \{a_{kl}(x, \xi_0, \Omega^2), a_{kl}(x, \xi_1, \Omega^2), \dots, a_{kl}(x, \xi_N, \Omega^2)\}, \end{aligned} \quad (9)$$

то система (5) преобразуется в систему $6(N + 1)$ линейных дифференциальных уравнений относительно функций $\bar{R} \{u, \tilde{u}, v, \tilde{v}, w, \tilde{w}\}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dx} &= \bar{u}; \quad \frac{d\bar{v}}{dx} = \tilde{v}; \quad \frac{d\bar{w}}{dx} = \tilde{w}; \\ \frac{d\tilde{u}}{dx} &= \Phi_2^{-1}[(\bar{a}_{11}\Phi_2 + \bar{a}_{12}\Phi_2'')\bar{u} + \bar{a}_{13}\Phi_2\tilde{u} + \bar{a}_{14}\Phi_1''\bar{v} + \bar{a}_{15}\Phi_1'\bar{w} + \bar{a}_{16}\Phi_1'\tilde{w}]; \\ \frac{d\tilde{v}}{dx} &= \Phi_1^{-1}[\bar{a}_{31}\Phi_2'\tilde{u} + \bar{a}_{32}\Phi_2'\tilde{v} + (\bar{a}_{33}\Phi_1 + \bar{a}_{34}\Phi_1'')\bar{w} + \bar{a}_{35}\Phi_1\tilde{w}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= \frac{\tilde{\varepsilon}_{11}\Omega^2}{\Delta}; \quad \bar{a}_{12} = -\frac{\Delta_6}{\Delta}; \quad \bar{a}_{13} = -\frac{1}{x}; \\ \bar{a}_{14} &= \frac{\Delta_4}{\Delta}; \quad \bar{a}_{15} = -\left(1 + \frac{\Delta_5}{\Delta}\right)\frac{1}{x}; \quad \bar{a}_{16} = -\left(1 + \frac{\Delta_5}{\Delta}\right); \\ \bar{a}_{21} &= \frac{\Delta_3}{\Delta}; \quad \bar{a}_{22} = -\frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \bar{a}_{23} = -\frac{1}{x}; \quad \bar{a}_{24} = \frac{\Delta_2}{\Delta}\frac{1}{x}; \quad \bar{a}_{25} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \\ \bar{a}_{31} &= -\frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}}; \quad \bar{a}_{32} = -\frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11}}; \quad \tilde{a}_{33} = \frac{1}{x^2} - \frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{11}}; \quad \bar{a}_{34} = -\frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}}; \quad \bar{a}_{35} = -\frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Эту систему можно записать в виде

$$\frac{d\bar{R}}{dx} = A(x, \Omega)\bar{R}. \quad (12)$$

Ненулевые элементы матрицы A равны

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= 1; & A_{21} &= \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{11}\Phi_2 + \bar{a}_{12}\Phi_2''); & A_{22} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{13}\Phi_2; \\
 A_{23} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{14}\Phi_2''; & A_{25} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{15}\Phi_1'; & A_{26} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{16}\Phi_1'; \\
 A_{34} &= 1; & A_{41} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{21}\Phi_2''; & A_{43} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{22}\Phi_2''; & A_{44} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{23}\Phi_2; \\
 A_{45} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{24}\Phi_1'; & A_{46} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{25}\Phi_1'; & A_{56} &= 1; \\
 A_{62} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{31}\Phi_2'; & A_{64} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{32}\Phi_2'; \\
 A_{65} &= \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{33}\Phi_1 + \bar{a}_{34}\Phi_1''); & A_{66} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{32}\Phi_1.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Граничные условия будут иметь вид

$$B_1\bar{R}(-1) = 0, \quad B_2\bar{R}(1) = 0. \tag{14}$$

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений (12)–(14) решалась устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Результаты численных исследований сравнивались с результатами, полученными на основании аналогичной методики, разработанной для упругого цилиндра. В качестве материала цилиндра рассматривалась пьезокерамика PZT 4 с пьезомодулями, равными нулю. Результаты сравнения представлены в табл. 1.

На рис. 1 представлена зависимость первых пяти частот собственных колебаний от относительной длины цилиндра L/h ($\varepsilon = 0,25$), материал цилиндра — пьезокерамика ЦТ-СтБС-2. Сплошными линиями изображены значения собственных частот с учетом пьезоэффекта, штриховыми — без учета пьезоэффекта ($e_{ij} = 0$). Из приведенного рисунка видно, что влияние пьезоэффекта приводит к “ужесточению” материала, т. е. повышению значения собственных частот. При этом при определении первой собственной частоты влиянием пьезоэффекта можно пренебречь. Для второй частоты заметное влияние пьезоэффекта наблюдается для достаточно коротких цилиндров ($L < 2$). Для более высоких частот это влияние заметно для более длинных цилиндров ($L < 4$).

Рис. 2 демонстрирует зависимость первых четырех собственных частот от внутреннего диаметра цилиндра (R_-), при этом длина цилиндра ($L = 5$) и внешний диаметр ($R_+ = 5$) остаются фиксированными. Рассматривается широкий диапазон изменения внутреннего диаметра цилиндра — от практически сплошного цилиндра до очень тонкой цилиндрической оболочки. В качестве материала цилиндра выбиралась пьезокерамика ЦТСтБС-2. Анализ результатов, приведенных на рис. 2, показывает, что при определении первой собственной

Таблица 1

Порядковый номер частоты	Собственные частоты упругого цилиндра, $N = 20$	Собственные частоты пьезокерамического цилиндра, $N = 24$
1	0,7787	0,7800
2	0,8061	0,8060
3	1,0321	1,0330
4	1,2421	1,2410
5	1,6565	1,6520
6	1,7410	1,7430

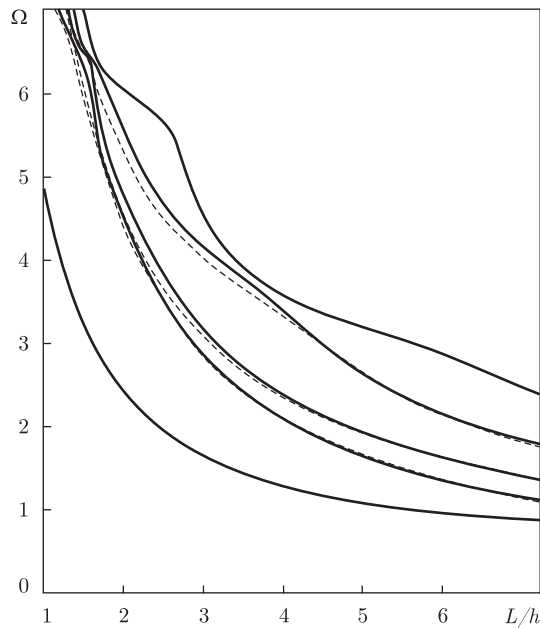


Рис. 1

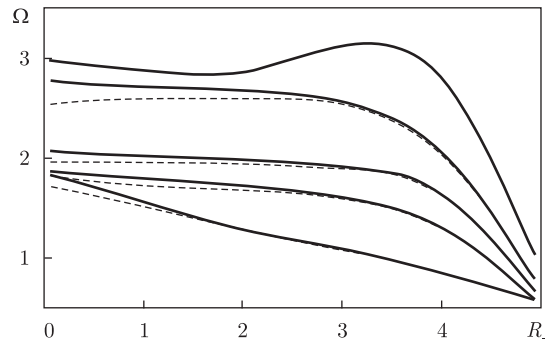


Рис. 2

частоты влияние пьезоэффекта проявляется лишь для очень толстых цилиндров ($R_- = 1$). Для более высоких частот влияние пьезоэффекта начинает проявляться для более тонких цилиндров ($R_- = 4$).

Предложенная методика представляет собой эффективное сочетание двух устойчивых численных методов по двум различным координатам. Применение такого подхода позволяет проводить исследование динамических задач для пьезокерамических тел в широком диапазоне изменения свойств пьезокерамического материала как в направлении одной координаты, так и другой, а также в широком диапазоне изменения их геометрических параметров.

1. Лазуткин В. Н., Михайлов А. И. Колебания пьезокерамических цилиндров конечных размеров с поляризацией по высоте // Акуст. журн. – 1976. – **22**, вып. 3. – С. 393–399.
2. Шульга Н. А., Борисенко Л. В. Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрическом нагружении // Прикл. механика. – 1990. – **25**, № 10. – С. 41–47.
3. Шульга Н. А., Борисенко Л. В. Электродинамические колебания радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра с частично электродированными боковыми поверхностями // Там же. – 1990. – **26**, № 1. – С. 43–47.

4. *Hussein M., Heyliger P. R.* Discrete layer Analysis of Axisymmetric Vibrations of Laminated Piezoelectric Cylinders // J. of Sound and Vibration. – 1996. – **192**, is. 5. – P. 995–1013.
5. *Kharouf N., Heyliger P. R.* Axisymmetric Free Vibrations of Homogeneous and Laminated Piezoelectric Cylinders // Ibid. – 1994. – **174**, is. 4. – P. 539–561.
6. *Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Puzyrev S. V.* On Free Vibrations of Rectangular in Plan Orthotropic Shallow Shells of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No 6. – P. 702–715.
7. *Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Puzyrev S. V.* Solving the Problem on Free Vibration of Rectangular in Plan Shallow Shells of the Complex shape in Plan // Ibid. – No 4. – P. 499–508.
8. *Grigorenko Y. M., Grigorenko A. Ya., Zakhariichehko L. I.* Investigation of the Stress State of Noncircular Cylindrical Shells with the cross-section in the Form of Linked Convex Half-Corrugations // Ibid. – 2006. – **42**, No 4. – P. 473–482.
9. *Grigorenko Y. M., Grigorenko A. Ya., Zakhariichehko L. I.* Solving the Problems on the Stress-Strain State of Cylindrical Shells with a Corrugated Elliptical Cross-Section // Ibid. – No 9. – P. 970–979.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев
Национальный транспортный университет, Киев*

Поступило в редакцию 10.07.2008

A. Ya. Grigorenko, T. L. Efimova, I. A. Loza

An approach to the investigation of vibrations of hollow piezoceramic cylinders of finite length

The axisymmetric problem on free longitudinal oscillations of hollow piezoceramic cylinders of finite length is considered. The effective numerical-analytical technique based on a representation of the required solution by basic splines is proposed. By means of this approach, the initial two-dimensional problem is reduced to a boundary-value problem on eigenvalues for a system of ordinary differential equations. The system obtained is solved a stable numerical method of discrete orthogonalization and the method of step-by-step search. The results of numerical calculations for the piezoceramic cylinders in a wide range of change of the geometrical parameters are given.