УДК 539.3

Т. В. Карнаухова

Активное демпфирование вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропной вязкоупругой прямоугольной пластины с жестким защемлением торцов

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

Розв'язується задача про активне демпфування вимушених резонансних згинних коливань прямокутної в'язкопружної ізотропної пластини з жорстко затиснутими торцями. Вважається, що механічне навантаження невідоме і знаходиться з експериментальних показників сенсора. Методом Бубнова–Гальоркіна одержано формулу для різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для демпфування першої моди коливань пластини. Досліджено вплив розмірів сенсора та актуатора, дисипативних властивостей і механічних граничних умов на ефективність активного демпфування коливань пластини.

В работе [1] предложен новый подход для активного демпфирования вынужденных резонансных колебаний тонких вязкоупругих изотропных пластин при помощи совместного использования пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов для случая, когда амплитуда действующей на пластину механической нагрузки неизвестна. В ней рассматривался наиболее простой случай механических граничных условий, отвечающих шарнирному опиранию торцов пластины. Подводимая к актуатору разность потенциалов, необходимая для компенсации механической нагрузки, рассчитывалась по показаниям сенсора. Для указанных граничных условий эффективность активного демпфирования будет самой высокой при полном покрытии пластины сенсорами и актуаторами.

В настоящей работе предложенный в [1] подход применяется для исследования активного демпфирования основной моды вынужденных резонансных изгибных колебаний вязкоупругой пластины для граничных условий, отвечающих жесткому защемлению торцов пластины. Для решения задачи используется метод Бубнова–Галеркина. Получена формула для расчета разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки. Из анализа этой формулы следует, что в отличие от [1] при жесткой заделке эффективность активного демпфирования указанных колебаний будет наибольшей при нанесении сенсоров и актуаторов в виде некоторых пятен. Представлены формулы для расчета размеров этих пятен. Показано, что при уменьшении размеров пятна и при их стремлении к размерам пластины управлять колебаниями пластины становится невозможным. Исследовано влияние вязкости на эффективность активного демпфирования колебаний при помощи предложенного подхода.

Рассмотрим прямоугольную изотропную вязкоупругую пластину с размерами $(2a \times 2b)$, на которую действует давление $p = p_0 e^{i\omega t}$, изменяющееся во времени по гармоническому закону с частотой, близкой к резонансной частоте пластины. Торцы пластины считаются жестко защемленными. Основные соотношения, позволяющие исследовать активное демпфирование резонансных колебаний тонких пластин, представлены в [2].

Уравнение колебаний изотропной вязкоупругой пластины при действии на нее механической и электрической нагрузки имеет следующий вид [1, 2]:

$$D\Delta\Delta w - \widetilde{\rho}\omega^2 w - p_0(x,y) - \Delta M_0 = 0. \tag{1}$$

При жестком защемлении торцов пластины

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \text{при} \qquad x = \pm a;$$
$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad \text{при} \qquad y \pm b.$$

Как и в [1], решение задачи ищется методом Бубнова–Галеркина. Выражение для перемещений колебаий по первой моде представляется в стандартном для этого случая граничных условий виде:

$$\begin{aligned} &w = A\widetilde{w}, \\ &\widetilde{w} = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

При этом автоматически удовлетворяются механические граничные условия.

Будем считать, что для демпфирования резонансных колебаний на пластину нанесено пятно размерами $(2c \times 2d)$ с центром, расположенным в центре пластины. В соответствии с методом Бубнова–Галеркина выражение (2) подставляем в уравнение (1), а полученный результат после умножения на функцию формы интегрируем по площади пластины. При этом используем соотношение

$$\iint\limits_{(S)} f\Delta g ds = \iint\limits_{(S)} g\Delta f ds \tag{3}$$

(S — площадь пластины).

В результате получим выражение для комплексной амплитуды колебаний пластины

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = \frac{49}{16} a^2 b^2 p_0 - \frac{735}{256} M_0 (a^2 + b^2) \psi(s), \\ &\psi(s) = s(1-s)(15 - 10s + 3s^2), \\ &\Delta_2 = 8a^2 b^2 \Delta, \\ &\Delta = D\left[7b^4 + 4a^2 b^2 + 7a^4 - \frac{2}{9}\widetilde{\rho}\omega^2 a^4 b^4\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $s = (l/L)^2$; l, L — длина диагоналей пьезоактивных включений и пластины соответственно. Полагая $\Delta_1 = 0$, из (5) получим выражение для той разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации внешней нагрузки:

$$V_A = \frac{32a^2b^2}{15(a^2+b^2)\psi(s)\gamma_{31}(h_0+h_1)}p_0. \tag{6}$$

При выполнении соотношения (6) амплитуда вынужденных колебаний по основной моде при совместном действии механической и электрической нагрузки равна нулю. Как следует из этого соотношения, механические граничные условия оказывают существенное влияние на эффективность активного демпфирования колебаний при помощи предлагаемого подхода. Так, например, при шарнирном закреплении торцов пластины наиболее эффективным является полное покрытие пластины сенсорами и актуаторами [1, 2]. Когда торцы жестко защемлены, работа актуатора будет наиболее эффективной при достижении функцией $\psi(s)$ максимума. Он достигается при $s_{\max}$, являющемся корнем уравнения

$$12s^3 - 39s^2 + 50s - 15 = 0. \tag{7}$$

Отсюда следует, что указанный выше метод активного демпфирования будет наиболее эффективным при длине диагонали актуатора $l = L\sqrt{s_{\max}}$. Из (6) следует также, что при $s \to 0$ и при $s \to 1$ разность потенциалов стремится к бесконечности. Таким образом, при полном покрытии пластины актуатором и при очень малых размерах актуатора управлять поведением пластины невозможно. Ниже буде показано, что работа сенсора является наиболее эффективной при тех же его размерах.

Пусть размещение и размеры актуатора и сенсора зафиксированы. Основные недостатки подхода, основанного на формулах (4), (6), состоят в том, что 1) свободные колебания не демпфируются и 2) необходимо знать внешнюю механическую нагрузку.

Для устранения второго из указанных недостатков используем подход, предложенный в [1]. Внешняя нагрузка определяется по показаниям сенсора, занимающего площадь S_1. Для короткозамкнутых электродов величина заряда определяется выражением

$$Q = \gamma_{31}(h_0+h_1)\iint\limits_{(S_1)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy. \tag{8}$$

Для разомкнутых электродов разность потенциалов определяется по формуле

$$V_S = \frac{h_1 Q}{S_1\gamma_{33}}. \tag{9}$$

Подставляя в (8) выражение (2), получим следующую формулу для показаний сенсора через амплитуду колебаний:

$$Q = \frac{16\gamma_{31}(h_0+h_1)Aa^3b^3(a^2+b^2)\psi(s)}{15}. \tag{10}$$

Величина V_S находится из соотношения (9).

Для определения нагрузки p_0 при механическом возбуждении воспользуемся выражением для амплитуды колебаний пластины на частоте, близкой к основной резонансной частоте. Эта амплитуда находится методом Бубнова–Галеркина. В результате получим:

$$A = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}. \tag{11}$$

Здесь введены такие обозначения:

$$\Pi_1 = \frac{49}{64}p_0, \qquad \Pi_2 = \Delta. \tag{12}$$

При этом первую резонансную частоту запишем таким образом:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(63b^4 + 36a^2b^2 + 63a^4)D'}{\widetilde{\rho}a^4b^4}}. \tag{13}$$

Подставляя (11) в выражение для показаний сенсора (10), получим соотношение для определения амплитуды и фазы механической нагрузки по показаниям сенсора

$$p_0 = -\frac{120}{49}\frac{Q\Delta}{\gamma_{31}(h_0 + h_1)a^3b^3(a^2 + b^2)\psi(s)}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (6), получим связь между показаниями сенсора и разностью потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной механической нагрузки:

$$V_A = -\frac{256}{49}\frac{Q\Delta}{ab(a^2 + b^2)^2(h_0 + h_1)^2\gamma_{31}^2\psi^2(s)}. \tag{15}$$

Аналогичное соотношение получим и при снятии с сенсора разности потенциалов. Для этого необходимо использовать представленное выше соотношение (9).

При использовании предлагаемого подхода к актуатору подводится разность потенциалов, определяемая через показания сенсора по формуле (15). При таком подходе необходимо знать лишь электромеханические свойства материалов пластины и ее размеры.

Как и в случае шарнирного закрепления торцов пластины, вязкость при использовании указанного подхода оказывает существенное влияние на эффективность предлагаемого подхода.

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена задача об активном демпфировании изгибных колебаний изотропной вязкоупругой прямоугольной пластины с жестким закреплением ее торцов в случае, когда внешняя механическая нагрузка неизвестна. Она определяется по экспериментальным показаниям сенсора. Получены аналитические формулы для расчета разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной механической нагрузки с использованием только показаний сенсора. Отмечено существенное влияние граничных условий и диссипативных свойств материала при реализации предложенного подхода.

1. *Карнаухова Т. В.* О новом подходе к активному демпфированию вынужденных резонансных колебаний изотропных вязкоупругих пластин // Доп. НАН України. – 2009. – № 5. – С. 78–82.
2. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖТТУ, 2005. – 428 с.

НТУ Украины "Киевский политехнический институт"
Поступило в редакцию 18.07.2008

T. V. Karnaukhova

Active damping of forced resonant bending vibrations of a viscoelastic isotropic rectangular plate with the built-in edges

A problem of the active damping of forced resonant bending vibrations of a viscoelastic isotropic rectangular plate with the built-in edges is solved. We suppose that a mechanical load is unknown and have found it by the experimental data of a sensor. By the Bubnov–Galerkin method, a formula for a potential difference to damp the forced vibrations of a plate on the first mode is obtained. Influence of the dimensions of sensors and actuators, the dissipative material properties, and the boundary conditions on the effectiveness of the active damping of vibrations of the plate is investigated.