УДК 517.5

А. С. Сердюк

Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена в рівномірній та інтегральних метриках

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

На класах інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничним кулям просторів L_s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, знайдено асимптотичні рівності для верхніх меж наближень сумами Валле Пуссена в рівномірній метриці. Асимптотичні рівності також встановлені у випадку наближення сумами Валле Пуссена в метриках просторів L_s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, на класах інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничній кулі простору L_1.

Нехай L_s, $1 \leqslant s < \infty$ — простір 2π-періодичних сумовних у s-й степені функцій f з нормою $\|f\|_s = \|f\|_{L_s} = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)^s| dt\right)^{1/s}$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій, у якому норма задана формулою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$; C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, норма у якому задана наступним чином: $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$. Інтегралами Пуассона сумовної функції $\varphi(\cdot)$ називають функції $f(x)$, що означаються за допомогою рівності

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x-t)P_{q,\beta}(t)\,dt, \qquad A_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

у якій $P_{q,\beta}(t)$ — ядра Пуассона з параметрами $q \in (0,1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$, тобто, функції вигляду

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0,1), \qquad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Множину всіх функцій, які допускають зображення у вигляді (1) при $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина із L_1, позначатимемо через $L^q_\beta\mathfrak{N}$. В рамках даної роботи у ролі $\mathfrak{N}$ виступатимуть множини $U^0_s = \{\varphi \in L_s \colon \|\varphi\|_s \leqslant 1, \varphi \perp 1\}$. При цьому для зручності покладемо $L^q_{\beta,s} \stackrel{df}{=} L^q_{\beta,s} U^0_s$.

Нехай $f \in L$ і ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

є рядом Фур'є функції f. Через $S_n(f;x)$ позначимо часткові суми Фур'є порядку n функції f:

$$S_n(f) = S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тригонометричні поліноми вигляду

$$V_{n,p}(f) = V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$$

називаються сумами Валле Пуссена функції f з параметрами n і p. При $p = 1$ поліноми $V_{n,p}(f;x)$ є звичайними частковими сумами Фур'є $S_{n-1}(f;x)$ порядку $n-1$ функції f. Якщо ж $p = n$, то суми $V_{n,p}(f)$ перетворюються у відомі суми Фейєра $\sigma_{n-1}(f;x)$ порядку $n-1$ функції f:

$$\sigma_{n-1}(f) = \sigma_{n-1}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x).$$

Дослідження апроксимативних властивостей сум $V_{n,p}(f)$ були розпочаті Валле Пуссеном [1], який вперше оцінив величини $\|f - V_{n,p}(f)\|_C$ через найкращі наближення тригонометричними поліномами в рівномірній метриці. Пізніше дослідження в даному напрямі були продовжені в роботах С. М. Нікольського [2], С. Б. Стєчкіна [3] та ін.

Мета даної роботи полягає у знаходженні асимптотичних рівностей для величин

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; V_{n,p})_C = \sup_{f\in L^q_{\beta,s}} \|f(x) - V_{n,p}(f;x)\|_C \tag{3}$$

і

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; V_{n,p})_{L_s} = \sup_{f\in L^q_{\beta,1}} \|f(x) - V_{n,p}(f;x)\|_s \tag{4}$$

при $n - p \to \infty$ і довільних значеннях параметрів $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $q \in (0,1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

Задача про знаходження асимптотичних рівностей для верхніх меж наближень сумами $V_{n,p}(f)$ в рівномірній метриці на тих чи інших функціональних класах вивчалась багатьма авторами, серед яких Б. Надь [4], С. М. Нікольський [5], С. Б. Стєчкін [6], А. В. Єфімов [7, 8], С. О. Теляковський [9], О. П. Тіман [10], В. І. Рукасов [11]. Детальніше з історією даного питання можна ознайомитись, наприклад, по бібліографічних коментарях монографії [12].

Зазначимо, що дана робота тісно пов'язана з роботою автора [13], в якій раніше були знайдені асимптотичні рівності для величини (3) при $s = \infty$, а також для величини (4) при $s = 1$.

Для формулювання основних результатів роботи введемо наступні позначення:

$$K_{q,p}(\theta) \overset{df}{=} 2^{-1/\theta}\left\|\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos t + q^2}\right\|_\theta, \qquad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty, \qquad q\in(0,1), \qquad p\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

$$\sigma(\theta,p) \overset{df}{=} \begin{cases} \text{при} \quad \theta = 1 & \text{і} \quad p = 1,\\ \text{при} \quad 1 < \theta \leqslant \infty & \text{і} \quad p = 1,\\ \text{при} \quad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty & \text{і} \quad p \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.\end{cases} \tag{6}$$

Теорема 1. *Нехай $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$. Тоді*

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; V_{n,p})_C = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') + O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right), \tag{7}$$

де

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, & s = 2, \\ 1, & s \in [1, \infty] \setminus \{2\}, \end{cases}$$

$s' = s/(s-1)$, *величини* $K_{q,p}(s')$ *і* $\sigma(s', p)$ *означені рівностями* (5) *і* (6) *відповідно, а* $O(1)$ — *величина рівномірно обмежена по параметрах* n, p, q, β *і* s.

Розглянемо деякі часткові випадки теореми 1.

При $s = 2$ формула (7) перетворюється у точну рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,2}; V_{n,p})_C = \frac{q^{n-p+1}}{\sqrt{\pi}p}\sqrt{\frac{1+q^2-q^{2p}(2p+1-q^2(2p-1))}{(1-q^2)^3}}, \tag{8}$$

яка при $p = 1$ (випадок наближення сумами Фур'є $S_{n-1}(f)$) набуває вигляду

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,2}; S_{n-1})_C = \frac{q^n}{\sqrt{\pi(1-q^2)}}, \qquad q \in (0,1), \qquad \beta \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

а при $p = n$ (наближення сумами Фейєра $\sigma_{n-1}(f)$) має вигляд

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,2}; \sigma_{n-1})_C = \frac{q}{n\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1+q^2-q^{2n}(2n+1-q^2(2n-1))}{(1-q^2)^3}}, \tag{10}$$
$$q \in (0,1), \qquad \beta \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

При довільних $1 \leqslant s \leqslant \infty$ і $p = 1$ з формули (7) одержуємо рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; S_{n-1})_C = q^n\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}2^{1/s'}}\left\|\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}\right\|_{s'} + O(1)\frac{q\delta(s)}{n(1-q)^{\sigma(s',1)}}\right). \tag{11}$$

Рівність (11) доведена у роботі [14]. При $s = \infty$ з (11) випливає асимптотична при $n \to \infty$ рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,\infty}; S_{n-1})_C = q^n\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right), \tag{12}$$

де $\mathbf{K}(q)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду,

$$\mathbf{K}(q) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}} = \frac{1}{2}\mathbf{K}_{q,1}(1).$$

Асимптотична формула (12) відтворює результат С. М. Нікольського [5, с. 222, 223] з покращеною С. Б. Стєчкіним [6, с. 139] оцінкою залишкового члена.

Оскільки при $s'/2 \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2^{1/s'}}\left\|\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}\right\|_{s'} = \frac{\pi^{1/s'}}{\sqrt{1-q^2}}\left(\sum_{k=0}^{s'/2-1}\frac{(s'/2+k-1)!}{(k!)^2(s'/2-k-1)!}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\right)^k\right)^{1/s'} \tag{13}$$

і

$$\|\cos t\|_{s'}^{s'} = \frac{2\pi(s'-1)!!}{(s')!!}, \tag{14}$$

то внаслідок (11) для усіх s таких, що $s/(2(s-1)) \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,s}; S_{n-1})_C = q^n \left(\frac{2^{1/s'}}{\pi^{1/s}\sqrt{1-q^2}} \left(\frac{(s'-1)!!}{(s')!!} \sum_{k=0}^{s'/2-1} \frac{(s'/2+k-1)!}{(k!)^2(s'/2-k-1)!} \left(\frac{q^2}{1-q^2}\right)^k \right)^{1/s'} + \right.$$
$$\left. + O(1)\frac{q\delta(s)}{n(1-q)^{\sigma(s',1)}} \right). \tag{15}$$

Зокрема, при $s = 2$ із (15) випливає рівність (9), а при $s = 4/3$ $(s' = 4)$ — рівність вигляду

$$\mathcal{E}\left(L^q_{\beta,\frac{4}{3}}; S_{n-1}\right)_C = q^n \left(\frac{3^{1/4}}{2^{1/2}\pi^{3/4}\sqrt{1-q^2}} \left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)^{1/4} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2} \right), \tag{16}$$

при $s = 6/5$ $(s' = 6)$ — рівність

$$\mathcal{E}\left(L^q_{\beta,\frac{6}{5}}; S_{n-1}\right)_C = q^n \left(\frac{5^{1/6}}{2^{1/2}\pi^{5/6}\sqrt{1-q^2}} \left(\frac{1+4q^2+q^4}{1-2q^2+q^4}\right)^{1/6} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2} \right) \tag{17}$$

і т. д. Формули (9), (11), (15)–(17) одержані в роботі автора [14].

При $s = \infty$ і $1 \leqslant p \leqslant n$, $p, n \in \mathbb{N}$ із формули (7) випливає рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,\infty}; V_{n,p})_C =$$
$$= \frac{q^{n-p+1}}{p} \left(\frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos t + q^2} dt + O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(1,p)}} \right), \tag{18}$$

яка була одержана автором у [13, с. 99].

Теорема 2. *Нехай $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, n, $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$. Тоді*

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; V_{n,p})_{L_s} = \frac{q^{n-p+1}}{p} \left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}} \mathbf{K}_{q,p}(s) + O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}} \right), \tag{19}$$

де величини $\mathbf{K}_{q,p}(s)$ і $\sigma(s,p)$ означені рівностями (5) *і* (6) *відповідно, а $O(1)$ — величина рівномірно обмежена по параметрах n, p, q, β і s.*

Зіставлення асимптотичних формул (7) і (17) дозволяє записати граничне співвідношення

$$\lim_{n-p\to\infty} \frac{\mathcal{E}(L^q_{\beta,s'}; V_{n,p})_C}{\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; V_{n,p})_{L_s}} = 1, \quad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant s \leqslant \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1. \tag{20}$$

Розглянемо деякі часткові випадки теореми 2.

При $s = 2$ формула (19) перетворюється в асимптотичну при $n - p \to \infty$ рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; V_{n,p})_{L_2} = \frac{q^{n-p+1}}{p} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\pi^{1/2}} \sqrt{\frac{1 + q^2 - q^{2p}(2p + 1 - q^2(2p - 1))}{(1 - q^2)^3}} + O(1) \frac{q}{(n - p + 1)(1 - q)^{\sigma(2,p)}} \right), \qquad (21)$$

яка при $p = 1$ набуває вигляду

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; S_{n-1})_{L_2} = q^n \left(\frac{1}{\pi^{1/2}\sqrt{1 - q^2}} + O(1) \frac{q}{n(1 - q)^2} \right). \qquad (22)$$

Формула (22) наведена в роботі [15, с. 1402].

При довільних $1 \leqslant s \leqslant \infty$ і $p = 1$ із формули (19) одержуємо рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; S_{n-1})_{L_s} = q^n \left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/S} 2^{1/s}} \left\| \frac{1}{\sqrt{1 - 2q\cos t + q^2}} \right\|_s + O(1) \frac{q}{n(1 - q)^{\sigma(s,1)}} \right). \qquad (23)$$

Рівність (23) встановлена у роботі [15]. Там же було наведено і декілька частинних випадків формули (23). Зокрема, при $s = 1$ із (23) випливає асимптотична при $n \to \infty$ рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; S_{n-1})_{L_1} = q^n \left(\frac{8}{\pi^2} \mathbf{K}(q) + O(1) \frac{q}{n(1 - q)} \right), \qquad (24)$$

де $\mathbf{K}(q)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду. Асимптотична рівність (24) відтворює відомий результат С. М. Нікольського [5, с. 222, 223] з покращеною С. Б. Стєчкіним [6, с. 139] оцінкою залишкового члена.

При $s/2 \in \mathbb{N}$ з рівностей (13), (14) і (23) випливає оцінка

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; S_{n-1})_{L_s} = q^n \left(\frac{2^{1/s}}{\pi^{(s-1)/s}\sqrt{1 - q^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{(s-1)!!}{s!!} \sum_{k=0}^{s/2-1} \frac{(s/2 + k - 1)!}{(k!)^2 (s/2 - k - 1)!} \left(\frac{q^2}{1 - q^2} \right)^k \right)^{1/s} + O(1) \frac{q}{n(1 - q)^2} \right), \qquad (25)$$

яка при $s = 2$ перетворюється у рівність (22), а при $s = 4$ і $s = 6$ — відповідно у рівності

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; S_{n-1})_{L_4} = q^n \left(\frac{3^{1/4}}{2^{1/2}\pi^{3/4}\sqrt{1 - q^2}} \left(\frac{1 + q^2}{1 - q^2} \right)^{1/4} + O(1) \frac{q}{n(1 - q)^2} \right), \qquad (26)$$

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; S_{n-1})_{L_6} = q^n \left(\frac{5^{1/6}}{2^{1/2}\pi^{5/6}\sqrt{1 - q^2}} \left(\frac{1 + 4q^2 + q^4}{1 - 2q^2 + q^4} \right)^{1/6} + O(1) \frac{q}{n(1 - q)^2} \right). \qquad (27)$$

При $s = 1$ і $1 \leqslant p \leqslant n$, p, $n \in \mathbb{N}$ з формули (19) випливає рівність

$$\mathcal{E}(L^q_{\beta,1}; V_{n,p})_{L_1} =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p} \left(\frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \frac{\sqrt{1 - 2q^p \cos pt + q^{2p}}}{1 - 2q\cos t + q^2} dt + O(1) \frac{q}{(n - p + 1)(1 - q)^{\sigma(1,p)}} \right), \qquad (28)$$

яка була одержана автором у [13, с. 104–105].

1. *La Vallé Poussin Ch.* Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné // Compt. rendus, – 1918. – Bd. 166. – S. 799–802.
2. *Никольский С. М.* О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – **4**. – С. 509–520.
3. *Стечкин С. Б.* О суммах Валле Пуссена // Докл. АН СССР. – 1951. – **80**. – С. 545–548.
4. *Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall, Berichte der math.-phys. Kl. Acad. der Wiss. zu Leipzig. – 1938. – **90**. – P. 103–134.
5. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 207–256.
6. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. МИАН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126–151.
7. *Ефимов А. В.* О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23**, № 5. – С. 737–770.
8. *Ефимов А. В.* О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена. II // Там же. – 1960. – **24**, № 3. – С. 431–468.
9. *Теляковский С. А.* Приближение дифференцируемых функций суммами Валле-Пуссена // Докл. АН СССР. – 1958. – **121**, № 3. – С. 426–429.
10. *Тиман А. Ф.* Обобщение некоторых результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского // Докл. АН СССР – 1951. – **81**, № 4. – С. 509–511.
11. *Рукасов В. И.* Приближение функций класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 478–483.
12. *Степанец А. И., Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближения суммами Валле-Пуссена // Праці Інституту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – **68**. – 386 с.
13. *Сердюк А. С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Там само. – 2004. – **56**, № 1. – С. 97–107.
14. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Там само. – 2005. – **57**, № 8. – С. 1079–1096.
15. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в метриці простору L_p // Там само. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1395–1408.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 20.10.2008

A. S. Serdyuk

Approximation of Poisson integrals by Vallee Poussin sums in uniform and integral metrics

We find the asymptotic equalities for upper bounds of approximations by Valleé Poussin sums in the uniform metric on the classes of Poisson integrals of functions from the unit balls of the spaces L_s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$. We also obtain the asymptotic equalities for approximations by Valleé Poussin sums in the metrics of the spaces L_s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, on the classes of Poisson integrals of functions from the unit ball of the space L_1.