УДК 531.36

Член-корреспондент НАН Украины **А. М. Ковалев**

Метод дополнительных функций в задачах частичной устойчивости

Досліджено стійкість нульового розв'язку автономної нелінійної системи. Поставлено і розв'язано задачу знаходження змінних, відносно яких розв'язок асимптотично стійкий у випадку, коли відома функція Ляпунова зі знакосталою похідною. Дослідження побудовано на методі додаткових функцій і виявляє взаємозв'язок властивостей інваріантності та асимптотичної стійкості динамічних систем. Конструктивність здобутих результатів продемонстровано на ілюстративному прикладі.

Построение функции Ляпунова [1, 2] со знакоопределенной производной для систем Барбашина–Красовского [3], выполненное в работах [4–6], основано на использовании двух типов функций, названных дополнительными, исходя из их роли в процессе получения функций Ляпунова. Успешное применение этих функций для устойчивых систем, выполненное в данной работе, и перспективы рассмотрения с их помощью общей ситуации в задачах устойчивости (и неустойчивости) позволяют говорить о создании метода дополнительных функций в теории устойчивости. Данный метод является естественным развитием метода функций Ляпунова и состоит в "подправке" функции Ляпунова с помощью дополнительных функций, исходя из свойств ее производной в силу системы.

В настоящей работе метод дополнительных функций применен к системам, для которых выполнены условия первой теоремы Ляпунова, с целью выяснения свойств асимптотической устойчивости их решений. Постановка задачи и предварительный материал даны в первых двух пунктах. Основным результатом является доказательство теоремы о частичной асимптотической устойчивости [7]. Установлено свойство максимальности множества, относительно которого нулевое решение асимптотически устойчиво (п. 3). Полученные результаты применены к исследованию на устойчивость нулевого решения нелинейной системы четвертого порядка (п. 4).

1. Устойчивость и частичная асимптотическая устойчивость. Рассматривается устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x} = f(x), \qquad f(0) = 0; \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \qquad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где D — некоторая окрестность нуля, функция $f(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой достаточное число раз для $x \in D$. Точка означает дифференцирование по времени t зависимой переменной x, а также функции $V(x)$ в силу системы (1): $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$. Здесь ∇ — оператор дифференцирования, в применении к скалярной функции он дает градиент, а к вектор-функции — матрицу Якоби; символ $\langle , \rangle$ означает скалярное произведение.

С целью изучения частичной асимптотической устойчивости введем обозначение $x^T = (y^T, z^T)$, где $y \in D_1 \subseteq R^k$, $z \in D_2 \subseteq R^{n-k}$, и перепишем систему (1) в виде

$$\dot{y} = f_1(y, z), \qquad \dot{z} = f_2(y, z). \tag{2}$$

Предполагаем, что нулевое решение системы (1) является изолированным и устойчивым, а также известна функция Ляпунова, удовлетворяющая первой теореме Ляпунова.

Теорема 1 [1]. *Пусть для системы* (1) *существует знакоопределенная функция* $V(x)$, *производная* $\dot{V}(x)$ *которой в силу системы* (1) *является знакопостоянной, знака противоположного* $V(x)$. *Тогда нулевое решение системы* (1) *устойчиво.*

Поставим следующую задачу.

Задача 1. Пусть для системы (1) известна функция $V(x)$, удовлетворяющая теореме 1. Требуется найти переменные $y = g(x)$, относительно которых нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Для решения этой задачи могут быть применены следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *существует знакоопределенная функция* $V(x)$, *производная* $\dot{V}(x)$ *которой в силу системы* (1) *является функцией* y*-знакоопределенной, знака противоположного* $V(x)$. *Тогда нулевое решение системы* (1) *устойчиво и асимптотически* y*-устойчиво.*

Теорема 3. *Пусть для системы* (1) *существует знакоопределенная функция* $V(x)$, *производная* $\dot{V}(x)$ *которой в силу системы* (1) *является знакопостоянной, знака противоположного* $V(x)$, *обращающейся в нуль на множестве* M. *Кроме того, множество* $\{x\colon y = 0\}$ *инвариантно и множество* $M \setminus \{x\colon y = 0\}$ *не содержит целых полутраекторий. Тогда нулевое решение системы* (1) *асимптотически* y*-устойчиво.*

Теорема 2 является следствием теоремы 5 работы [8] для автономных систем. Теорема 3 является, фактически, переформулировкой на рассматриваемый случай теоремы Ризито [9], которая, в свою очередь, обобщает теорему Барбашина–Красовского [3] на случай частичной устойчивости.

Отметим, что, как следует из теоремы 2, поставленную в данной работе задачу уже рассматривал В. В. Румянцев в работе [8]. Теорема 3 показывает влияние свойства инвариантности на асимптотическую устойчивость: множество $\{x\colon y = 0\}$ должно быть инвариантным. Впервые связь между инвариантностью и асимптотической устойчивостью была выявлена Барбашиным и Красовским и проявлялась в отсутствие целых полутраекторий, кроме нулевого решения, на множестве M. Дальнейший анализ показывает, что связь между двумя указанными свойствами не является случайностью, а отражает ситуацию по существу. Поэтому для решения поставленной выше задачи потребуются некоторые сведения по теории инвариантности.

2. Инвариантные соотношения и дополнительные функции. В качественной теории дифференциальных уравнений со свойством инвариантности связаны два следующих понятия: инвариантное множество и инвариантное соотношение.

Определение 1. Множество $G \subset D$ называется инвариантным множеством системы (1), если всякое решение $x(t)$ системы (1), имеющее с G общую точку $x(t^*)$, целиком принадлежит этому множеству: $x(t) \in G$, $t \in [t_0, \infty)$.

Определение 2. Соотношение $\varphi(x) = 0$ называется инвариантным соотношением системы (1), если определяемое им множество содержит инвариантное множество системы (1).

Инвариантные множества играют важную роль при описании динамики систем и описываются уравнениями Леви-Чивита [10].

Теорема 4. *Для того чтобы уравнения* $V_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, l)$ *определяли инвариантное множество системы* (1), *необходимо и достаточно, чтобы функции* $V_i(x)$ *удовлетворяли системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных*

$$\langle f(x), \nabla V_i(x)\rangle = \sum_{j=1}^{l} \lambda_{ij}(x) V_j(x), \qquad i = 1, \ldots, l, \tag{3}$$

где функции $\lambda_{ij}(x)$ *не имеют особенностей в рассматриваемой области.*

Для проверки, является ли заданное соотношение инвариантным соотношением системы (1), используем следующую теорему.

Теорема 5 [11]. *Порождаемое инвариантным соотношением* $\varphi(x) = 0$ *инвариантное множество* G *системы* (1) *определено уравнениями*

$$\varphi^{k_i}(x) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, l, \tag{4}$$

где l *— число функционально независимых функций в последовательности*

$$\varphi(x),\ \dot{\varphi}(x),\ \ddot{\varphi}(x),\ \ldots, \tag{5}$$

при этом $\nabla\varphi(x) \neq 0$ *для* $x \in G$.

С использованием теоремы 5 устанавливается важное свойство, необходимое для построения функции Ляпунова со знакоопределенной производной [5, 6].

Лемма 1. *Если множество* $N = \{x\colon \varphi(x) = 0,\ \nabla\varphi(x) \neq 0\} \subset D$ *не содержит целых полутраекторий, то для каждой точки* $x_0 \in N$ *найдется* k *такое, что* $\varphi^k(x_0) \neq 0$.

Данное свойство дало возможность получить [4–6] дополнительные функции, добавление которых к исходной функции Ляпунова при выполнении условий теоремы Барбашина–Красовского последовательно сужает множество обращения в нуль ее производной, начиная с исходного множества M и до нулевой точки, сохраняя знакоопределенность самой функции и ее производной в остальных точках.

Для построения дополнительных функций важное значение имеет структура множества M, определяемая его геометрическими и дифференциальными особенностями. Во-первых (геометрические особенности), множество M может быть суммой подмножеств: $M = \bigcup_{i=1}^{s} M_i$, $M_i = \{x\colon \varphi_i(x) = 0,\ \nabla\varphi_i(x) \neq 0\}$. Кроме того, попарные пересечения $M_k \bigcap M_m$ могут содержать ненулевые точки для некоторых k, m, что также необходимо учитывать. Во-вторых (дифференциальные особенности), для некоторых множеств M_i вопрос о существовании инвариантного множества может не решаться первыми двумя членами последовательности (5), т. е. в лемме 1 для точек $x_0 \in M_i$ имеем $k > 1$.

Приведем два типа дополнительных функций [4–6], с использованием которых строится функция Ляпунова со знакоопределенной производной. В простейшем случае, когда множество M обращения в нуль производной $\dot{V}(x)$ описывается одной функцией $\varphi(x)$: $M = \{x\colon \varphi(x) = 0,\ \nabla\varphi(x) \neq 0\}$ и задача существования инвариантного множества решается первыми двумя членами последовательности (5), в качестве дополнительной функции принимается следующая функция:

$$V_a = \langle\nabla\varphi(x), f(x)\rangle^{2m} \langle\langle\nabla\varphi(x), f(x)\rangle, \varphi(x)\rangle. \tag{6}$$

Функция типа

$$V_{ai} = \langle\nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle^{2m} \langle\langle\nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle, \varphi_i(x)\rangle \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{s} \varphi_j^2(x) \tag{7}$$

принимается в качестве дополнительной функции для множества M_i в случае, когда множество M состоит из нескольких множеств: $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$, для каждого из которых задача существования инвариантного множества решается первыми двумя членами последовательности (5).

Замечание 1. Для упрощения функций (6), (7) вместо функции $f(x)$ можно использовать ее значение $f_N(x)$, вычисленное для $x \in M$, $x \in M_i$ [3].

3. Основная теорема. Вернемся к решению задачи 1. Предполагаем, что множество M, на котором производная $\dot{V}(x)$ обращается в нуль, представляется в виде суммы множеств: $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$, $M_k \bigcap M_m = \varnothing$ $(k, m = 1, \ldots, s)$; $M_i = \{x\colon \varphi_i(x) = 0,\ \nabla\varphi_i(x) \neq 0\}$. С помощью теоремы 5 исследуем множества M_i на инвариантность. Возможны два случая. В первом случае уравнения (4) для $i = 1, \ldots, s$ допускают только нулевое решение, т. е. все множества M_i не содержат инвариантного множества и для системы (1) выполнены условия теоремы Барбашина–Красовского. Получаем, что нулевое решение асимптотически устойчиво по всем переменным, и для системы (1) строится функция Ляпунова со знакоопределенной производной методом дополнительных функций [4–6].

Во втором случае наряду с множествами M_i, не содержащими инвариантных множеств, имеются множества $M_1, \ldots, M_c$, содержащие инвариантные множества, описываемые функциями $\varphi_{p1}(x), \ldots, \varphi_{pc}(x)\colon \varphi_{pi}(x) = 0$, $i = 1, \ldots, c$. Пусть среди функций $\varphi_{pi}(x)$ имеется k независимых. Примем их в качестве новых переменных $y_i = \varphi_{pi}(x)$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда дополнительные функции сохраняют знакоопределенность исходной функции Ляпунова, при этом функции, соответствующие первой группе, обеспечивают знакоопределенность производной на соответствующих множествах, а функции второй группы приводят к знакоопределенности лишь по отношению к переменным y_i. Поэтому построенная по предложенной схеме функция $V(x)$ будет знакоопределенной, а ее производная $\dot{V}(x)$ — y-знакоопределенной. Таким образом, в данном случае нулевое решение будет асимптотически y-устойчивым. Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть для системы* (1) *существует знакоопределенная функция* $V(x)$, *производная которой в силу системы* (1) *является знакопостоянной, знака противоположного* $V(x)$. *Множество* $M = \{x\colon \dot{V}(x) = 0\}$ *представляется суммой множеств* $M = \bigcup\limits_{\substack{i=1\\ j=1}}^{s,s_i} M_{ij}$,

$$
\begin{aligned}
&M_{ij} = \{x\colon \varphi_i(x) = 0,\ \dot{\varphi}_i(x) = 0,\ \ldots,\ \varphi_i^{(k_j-1)}(x) = 0,\ \varphi_i^{(k_j)}(x) \neq 0,\ \nabla\varphi_i(x) \neq 0\},\\
&M_{ij} \bigcap M_{kl} = \varnothing.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Предполагаем, что $V(x)$, $\varphi_{ij}(x)$ — *функции, дифференцируемые достаточное число раз, знакоопределенность функции* $V(x)$ *определяется формой конечного порядка, знакопостоянство* $\dot{V}(x)$ *и неравенства* $\varphi_i^{(k_j)}(x) \neq 0$ *определяются членами разложения в окрестности нуля конечного порядка. Тогда существуют числа* m_{ij}, α_{ij} *такие, что функция*

$$
V_f(x) = V(x) + \sum_{i,j=1}^{s,s_j} \alpha_{ij} V_{aij}(x)
\tag{9}
$$

будет знакоопределенной, а ее производная $\dot{V}_f(x)$ будет y-знакоопределенной, знака противоположного $V(x)$, и нулевое решение системы (1) *будет устойчиво по всем переменным и асимптотически y-устойчиво. Здесь функции $V_{aij}(x)$ определены формулой* (7), $y^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_k)$, *где y_i являются независимыми функциями $y_i = \varphi_{pi}(x)$, с помощью которых описываются инвариантные множества, содержащиеся в множествах M_{ij}.*

Замечание 2. В качестве дополнительных функций $V_{aij}(x)$ можно использовать упрощенные функции, указанные в замечании 1.

Замечание 3. В теореме 6 частичная асимптотическая устойчивость устанавливается относительно переменной y, обладающей тем же свойством, что и в теореме Ризито: множество $\{x \colon y = 0\}$ является инвариантным.

В связи с теоремой 6 и замечанием 3 рассмотрим вопрос о том, можно ли расширить полученное в теореме 6 множество частичной асимптотической устойчивости, построив, например, другую функцию Ляпунова. Ответ на этот вопрос — отрицательный. Причиной этому наличие следующих двух свойств построенного множества M_p частичной асимптотической устойчивости:

1) множество $M_p = \{x \colon y = 0\}$ является инвариантным;

2) для точек $x \in M_p$ выполнено условие $\dot{V}_f(x) = 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда множество, относительно которого нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво, является максимально возможным, т. е. не допускает расширения.*

4. Пример. Применим полученные результаты к исследованию на устойчивость нулевого решения следующей системы:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + a x_2^2 + b x_3^3, \\
&\dot{x}_2 = -a x_1 x_2 + c x_2 x_3 x_4, \\
&\dot{x}_3 = \omega x_4 + \lambda_2 x_2^2 x_3 - b x_1 x_3^2, \\
&\dot{x}_4 = -\omega x_3 - c x_2^2 x_3.
\end{aligned} \tag{10}$$

При $\lambda_1 \lambda_2 \omega a c \neq 0$ для системы (10) нуль является изолированной особой точкой. Для исследования устойчивости нулевого решения рассмотрим функцию

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Для ее производной находим выражение

$$\dot{V} = 2(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 x_3^2).$$

На основании теоремы 2 заключаем, что при $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ нулевое решение системы (10) устойчиво (по всем переменным) и асимптотически x_1-устойчиво. Применим теорему 6 для нахождения максимального множества, относительно которого нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво. Отдельно рассмотрим два случая: 1) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\omega abc \neq 0$; 2) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\omega ac \neq 0$, $b = 0$. Исследование начнем с изучения множества M, на котором $\dot{V}(x) = 0$.

В первом случае множество M состоит из трех множеств $M = M_1 \bigcup M_2 \bigcup M_3$, где

$$M_1 = \{x \colon \varphi_{11} = x_1 = 0,\ \varphi_{12} = x_2 = 0\},$$

$$M_2 = \{x\colon \varphi_{21} = x_1 = 0,\ \varphi_{22} = x_3 = 0\},$$

$$M_3 = M_1 \bigcap M_2 = \{x\colon \varphi_{31} = x_1 = 0, \varphi_{32} = x_2 = 0,\ \varphi_{33} = x_3 = 0\}.$$

При этом предполагается, что точки множества $M_1 \bigcap M_2$ исключены из множеств M_1, M_2. Рассмотрим поведение производных функций $\varphi_i(x)$ на множествах M_i. На множестве M_1 имеем $\dot\varphi_{11} = bx_3^2$, $\dot\varphi_{12} = 0$, поэтому $\dot\varphi_{11} \neq 0$, так как точки множества M_1, для которых $x_3 = 0$, отнесены к множеству M_3. На множестве M_2 имеем $\dot\varphi_{21} = ax_2^2$, $\dot\varphi_{22} = \omega x_4$, поэтому $\dot\varphi_{11}^2 + \dot\varphi_{22}^2 > 0$. На множестве M_3 имеем $\dot\varphi_{31} = 0$, $\dot\varphi_{32} = 0$, $\dot\varphi_{33} = \omega x_4$, поэтому $\dot\varphi_{33} \neq 0$. На основании теоремы 6 существуют числа m_1, m_2, m_3, α_1, α_2, α_3 такие, что функция

$$\begin{aligned} V_f = {}& x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \alpha_1(bx_3^2)^{2m_1} bx_3^2 x_1 (x_1^2 + x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \\ &+ \alpha_2(a^2x_2^4 + \omega x_4^2)^{m_2}(ax_2^2x_1 + \omega x_4 x_3)(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \\ &+ \alpha_3(\omega x_4)^{2m_3}\omega x_4 x_3 (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2) \end{aligned} \tag{11}$$

будет определенно положительной, а ее производная в силу системы (10) — определенно отрицательной. Таким образом, в первом случае нулевое решение системы (10) является асимптотически устойчивым. Отметим, что при построении функции (11) в соответствии с замечанием 2 использованы упрощенные дополнительные функции.

Второй случай отличается от первого только тем, что на множестве M_1 имеем $\dot\varphi_{11} = \dot\varphi_{12} = 0$ (также и все высшие производные равны нулю). На основании теоремы 5 заключаем, что множество M_1 является инвариантным. Функция V_f будет иметь вид (11), где надо положить $b = 0$, и останется положительно определенной, а ее производная, в отличие от первого случая, будет отрицательно постоянной и будет обращаться в нуль только на множестве M_1, т. е. будет отрицательно (x_1, x_2)-определенной. Таким образом, на основании теоремы 6 во втором случае нулевое решение системы (10) является устойчивым (по всем переменным) и асимптотически (x_1, x_2)-устойчивым. Максимальность множества частичной асимптотической устойчивости демонстрируется тем, что для $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ система принимает вид $\dot x_3 = \omega x_4$, $\dot x_4 = \omega x_3$. Движение по x_3, x_4 является устойчивым в силу наличия интеграла $V_{f0} = x_3^2 + x_4^2$. Движение в малой окрестности нуля можно охарактеризовать как вращательное, стремящееся при $t \to \infty$ к вращению по окружности $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3^2 + x_4^2 = c^2$.

Таким образом, в работе выявлена и изучена взаимосвязь двух свойств-антагонистов динамических систем — асимптотической устойчивости и инвариантности: с одной стороны, отсутствие инвариантных множеств приводит к асимптотической устойчивости, устанавливаемой теоремой Барбашина–Красовского, а с другой — инвариантное множество является предельным для частично асимптотически устойчивых движений, устанавливаемых теоремой, доказанной в настоящей работе.

Следует отметить, что инвариантное множество может иметь достаточно сложную структуру, что проявляется в его описании с использованием цепочки производных. Анализ этого множества необходим для построения дополнительных функций, а также для описания множества, относительно которого решения асимптотически устойчивы. Проделанное исследование привело к уточнению свойств цепочки производных и к необходимости более детального ее изучения, что требует отдельного рассмотрения.

Поставленная в работе задача и полученные при ее решении теоремы связаны с результатами А. М. Ляпунова [1, 2], Е. А. Барбашина, Н. Н. Красовского [3], В. В. Румянцева [7, 8].

В основе выполненного исследования лежит метод дополнительных функций [4–6], примененный к задачам частичной асимптотической устойчивости. В дальнейшем предполагается расширение круга решаемых с помощью данного метода задач с целью создания конструктивной теории устойчивости.

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
2. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. – Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 476 с.
3. *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**, № 3. – С. 453–456.
4. *Ковалев А. М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266–272.
5. *Ковалев А. М., Суйков А. С.* Построение функции Ляпунова при выполнении теоремы Барбашина–Красовского // Докл. НАН Украины. – 2008. – № 12. – С. 22–27.
6. *Ковалев А. М., Суйков А. С.* Функции Ляпунова для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского // Пробл. управления и информатики. – 2008. – № 6. – С. 5–15.
7. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – Москва: Наука, 1987. – 256 с.
8. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных // Прикл. математика и механика. – 1971. – **35**, вып. 1. – С. 138–143.
9. *Risito C.* Sulla stabilita asintotica parziale // Ann. math. pura ed appl. – 1970. – **84**. – P. 279–292.
10. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. – Bologna: Zanichelli, 1952. – Vol. 2. – 671 p.= *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
11. *Харламов П. В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 26.02.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. M. Kovalev**

Method of additional functions in the partial stability problems

The stability of the trivial solution of a nonlinear autonomous system is considered. The problem of finding the variables, with respect to which the solution is asymptotically stable, is formulated and solved in the case where a Lyapunov function with the semidefinite derivative is known. The investigation is based on the method of additional functions and shows the interconnection between the invariance and asymptotic stability properties of dynamical systems. The constructibility of the results obtained is demonstrated by an illustrative example.