ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2009

МЕХАНІКА

УДК 539.3

В. И. Бабенко

К оценке критического давления для строго выпуклой оболочки неканонической формы

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Одержано апріорні оцінки зверху асимптотичного значення критичного тиску для строго опуклої оболонки неканонічної форми за двома її параметрами.

В данной работе ставится задача о получении априорных оценок критических нагрузок для оболочек неканонической формы, а именно, рассматривается вопрос о получении оценки сверху асимптотики критической нагрузки для близкого к безмоментному напряженно-деформированного равновесного состояния достаточно тонкой, строго выпуклой, непологой, односвязной оболочки, находящейся под действием равномерного внешнего давления P. Относительно формы срединной поверхности F оболочки предполагается, что она имеет непрерывные нормальные кривизны и строго положительную гауссову кривизну K. Материал оболочки — линейно упругий, однородный, изотропный. Предполагается также, что оболочка либо замкнутая, либо жестко закреплена вдоль плоского края ∂F.

1. Исходя из уравнений нелинейной теории оболочек Кирхгофа–Лява, в [1] асимптотическими методами показано, что в начальной стадии потеря устойчивости рассматриваемого здесь напряженно-деформированного равновесного состояния оболочки происходит вне некоторой окрестности ее края при критической нагрузке, асимптотическое значение P_* которой в случае равномерного внешнего давления P можно представить в виде

$$P_* = \overline{E}\min_{(F)}\frac{K}{1+\sqrt{1+4K(T^{12}T^{21}-T^{11}T^{22})}}, \tag{1}$$

где $\overline{E} = 2E\delta^2/\sqrt{3(1-\nu^2)}$; минимум берется по всем внутренним точкам поверхности F; E — модуль Юнга, а ν — коэффициент Пуассона материала оболочки; δ — ее толщина; $T^{\alpha\beta}$ — определяемые по линейной, безмоментной теории оболочек компоненты усилий, вызываемых в оболочке действием внешнего давления P в докритическом равновесном состоянии.

Формула (1) была получена также в [2] из вариационного принципа "В" геометрической теории устойчивости оболочек без каких-либо предположений о форме потери устойчивости. Если же принять дополнительное предположение о том, что потеря устойчивости сопровождается образованием малой вмятины конечных размеров, то из вариационного принципа "В" для асимптотики критического давления получается [3] известная формула А. В. Погорелова

$$P_{**} = \overline{E} \min_{(F)} K. \tag{2}$$

Так как при получении этой формулы из вариационного принципа "В" накладывались дополнительные ограничения на искомую форму потери устойчивости, то

$$P_* \leqslant P_{**}. \tag{3}$$

Далее, в работе [4] получены оценки для гауссовой кривизны K строго выпуклой поверхности F по некоторым ее параметрам. Всего было рассмотрено три варианта задания этих параметров и доказаны соответственно три теоремы. Полученные в [4] результаты можно объединить в виде

$$\min K \leqslant K_0, \tag{4}$$

где минимум берется по всем точкам поверхности F; $K_0 \equiv \mathrm{const}$ — гауссова кривизна веретенообразной поверхности F_0, параметры которой определяются заданными параметрами поверхности F.

Из формул (1)–(4) получаем искомую оценку сверху для асимптотики критического давления для строго выпуклой оболочки

$$P_* \leqslant \overline{E} K_0. \tag{5}$$

2. Веретенообразная поверхность вращения F_0 выпукла, симметрична относительно своей экваториальной плоскости и имеет непрерывные нормальные кривизны всюду, кроме двух точек P_0, Q_0 — точек пересечения со своей осью вращения, где она имеет вершины (конические точки). Во всех остальных точках ее гауссова кривизна K_0 постоянна. Длина отрезка P_0Q_0 равна диаметру поверхности F_0, т. е. наибольшему расстоянию между любыми двумя ее точками. Обозначим через R_0 радиус экватора поверхности F_0 $\left(R_0 \leqslant 1/\sqrt{K_0}\right)$. При $R_0 = 1/\sqrt{K_0}$ поверхность F_0 — сфера радиуса R_0. Введем декартову систему координат (x, y, z), где координатная ось z — ось вращения поверхности F_0, а координатная плоскость (x, y) — ее экваториальная плоскость. Тогда уравнение меридиана $y = 0$ поверхности F_0 в параметрической форме можно записать в виде

$$x = R_0 \cos\sigma; \qquad z = \int\limits_0^{\sigma} \sqrt{\frac{1}{K_0} - R_0^2 \sin^2\sigma d\sigma}; \qquad |\sigma| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

где $\sigma = l\sqrt{K_0}$; l — длина дуги меридиального сечения. Если поверхность F_0 разрезать по меридиану, то полученная поверхность допускает геометрическое изгибание в кусок сферы радиуса $1/\sqrt{K_0}$, заключенный между двумя ее меридианами [5, 6].

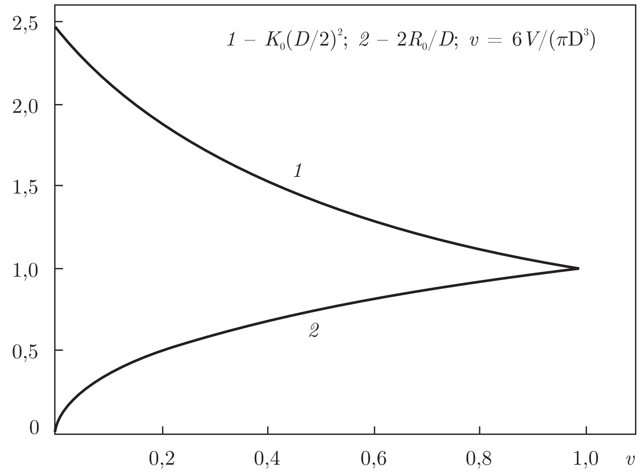

Рис. 1

Далее рассмотрим исследованные в [4] три варианта задания ограничений на форму строго выпуклой поверхности (в нашем случае — срединной поверхности F оболочки) и для каждого варианта найдем поверхность F_0. То есть вычислим гауссову кривизну K_0 и радиус экватора R_0, которые полностью определяют поверхность F_0.

3. Пусть срединная поверхность F замкнутой оболочки ограничивает строго выпуклое тело, диаметр и объем которого не меньше соответственно D и V, где $V \leqslant \pi D^3/6$ — неравенство Бибербаха для выпуклых тел [5].

В этом случае, согласно теореме 1 из [4], искомая веретенообразная поверхность F_0 ограничивает тело, диаметр и объем которого равны, соответственно, D и V. Ее гауссова кривизна K_0 в (4) и радиус экватора R_0 определяются из уравнений

$$D = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{K_0} - R_0^2 \sin^2\sigma}\, d\sigma, \tag{6}$$

$$V = 2\pi R_0^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\sigma \sqrt{\frac{1}{K_0} - R_0^2 \sin^2\sigma}\, d\sigma. \tag{7}$$

Если $V = \pi D^3/6$, то F_0 — сфера радиуса $D/2$. Если $V \to 0$, то $R_0 \to 0$, а $K_0 \to \pi^2/D^2$. При промежуточных значениях V гауссова кривизна $K_0 < \pi^2/D^2$ — неравенство Бонне [5]. Более точные значения K_0 для заданных значений D и V находим численно, решая систему уравнений (6), (7). Полученные численные результаты представлены на рис. 1 зависимостями безразмерных параметров гауссовой кривизны $K_0(D/2)^2$ (кривая *1*) и радиуса экватора $2R_0/D$ (кривая *2*) от величины безразмерного параметра объема $v = 6V/(\pi D^3)$, характеризующего в некотором смысле отклонение формы рассматриваемой оболочки от сферической. Заметим, что кривая *1* для гауссовой кривизны (с точностью до 4,5%) хорошо воспроизводится параболой, пересекающей ее в трех точках: $v = 0$, $v = 0{,}5$ и $v = 1$.

4. Пусть теперь срединная поверхность F замкнутой оболочки ограничивает строго выпуклое тело L, диаметр которого не меньше D, а P и Q — точки на F, расстояние между которыми равно диаметру тела L. Пусть максимальная площадь сечений тела L плоскостями, ортогональными отрезку PQ, не меньше S, где $S \leqslant \pi D^2/4$. Тогда из теоремы 2 [4] следу-

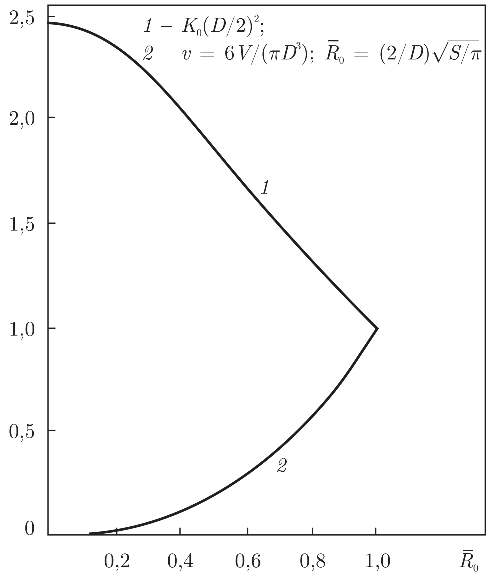

Рис. 2

ет, что искомая веретенообразная поверхность F_0 имеет диаметр D, а радиус экватора $R_0 = \sqrt{S/\pi}$. Ее гауссову кривизну K_0 находим из уравнения (6). Результаты численного счета представлены на рис. 2, где кривая *1* — зависимость безразмерного параметра гауссовой кривизны $K_0(D/2)^2$ от параметра радиуса экватора $\overline{R}_0 = 2\sqrt{S/\pi}/D$. Там же кривой *2* показана зависимость от $\overline{R}_0$ параметра $v = 6V/(\pi D^3)$ объема V (7) тела, ограниченного поверхностью F_0. Отметим, что кривые рис. 2 можно построить непосредственно по данным рис. 1.

5. Далее рассмотрим односвязную оболочку с высотой H, жестко закрепленную вдоль плоского края, ограничивающего область с площадью s. Пусть среди всех веретенообразных поверхностей вращения F', содержащих осесимметричный сегмент высотой H и радиусом основания $r = \sqrt{s/\pi}$, поверхность F'' имеет наибольшую гауссову кривизну, которую обозначим через K_0. Содержащийся в F'' сегмент высотой H и радиусом основания r обозначим через F_0. Найденные таким образом сегмент F_0 и гауссова кривизна K_0 будут искомыми, т. е. будут в данном случае фигурировать в оценке (4), а значит и в (5). При $H \leqslant r$ F_0 — сферический сегмент F_s радиусом кривизны $R = (r^2 + H^2)/(2H)$ и $K_0 = 1/R^2$. При $H > r$ F_0 — отличный от F_s (так как $K_0 > 1/R^2$) сегмент веретенообразной поверхности F'', содержащий ее экватор, т. е. F_0 — выпуклый колпак [4]. Его гауссова кривизна

$$K_0 = \max_{R'} K'(R'). \tag{8}$$

Здесь $K'(R')$ — решение уравнения $H = \int\limits_{-\varphi}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{K'} - (R')^2 \sin^2 \sigma d\sigma}$, где $\varphi = \arccos(r/R')$. Результаты вычислений показаны на рис. 3 зависимостями от параметра r/H безразмерных величин, дающих представление о близости F_0 к сферическому сегменту F_s радиуса кривизны R. Кривая *1* описывает изменение параметра гауссовой кривизны K_0R^2 сегмента F_0, а кривая *2* — параметра радиуса его экватора R_0/R (R_0 — значение R', при котором достигается максимум в (8)). Интересно отметить, что при $r/H \geqslant 0{,}45$ сегмент F_0 доста-

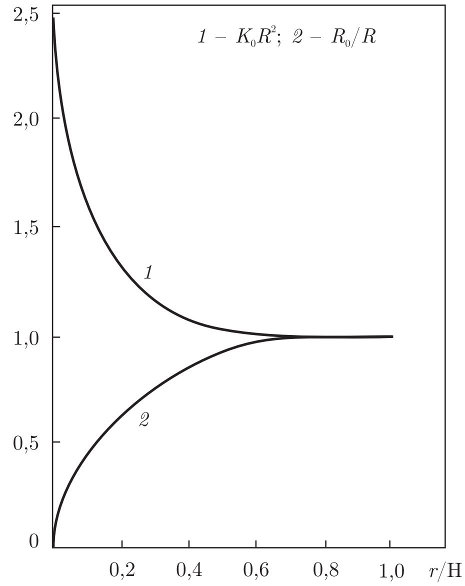

Рис. 3

точно близок к сферическому F_s: отклонение от 1 параметра кривизны не превышает 5%, а параметра радиуса экватора — 10%.

6. В заключение заметим, что в рассмотренных выше случаях неравенство (4) будет равенством либо близким к нему, если срединная поверхность оболочки совпадает с веретенообразной поверхностью F_0 (что имеет место, когда F_0 — сфера или ее сегмент), либо близка к F_0 [4]. Для таких форм оболочек будет максимальной (при заданных параметрах оболочки) асимптотика критического давления P_{**}, определяемая геометрическим методом [3].

1. *Бабенко В. И.* Потеря устойчивости непологих строго выпуклых анизотропных оболочек // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. – 1977. – № 2. – С. 95–103.
2. *Бабенко В. И.* Геометрическое исследование неустойчивости безмоментных оболочек // Укр. геометрич. сб. – Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1972. – Вып. 12. – С. 12–22.
3. *Бабенко В. И.* К геометрической теории потери устойчивости жестко закрепленных строго выпуклых оболочек при внешнем давлении // Докл. АН Украины. – 1993. – № 7. – С. 46–49.
4. *Бабенко В. И.* К оценке гауссовой кривизны строго выпуклых поверхностей // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 7–11.
5. *Бляшке В.* Круг и шар. – Москва: Наука, 1967. – 232 с.
6. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 420 с.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 19.01.2009

V. I. Babenko

On the estimation of the critical pressure for a strictly convex shell with non-canonical shape

Summary an a priori upper bound of the asymptotic value of critical pressure for a strictly convex shell with non-canonical shape by its two parameters is obtained.