УДК 539.3

А. Я. Григоренко, Т. Л. Ефимова

Об одном подходе к решению задачи о свободных колебаниях сплошного неоднородного цилиндра конечной длины

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

На базі тривимірної теорії пружності розглянуто задачу про вільні коливання суцільного циліндра з різними граничними умовами на його торцях. Основні рівняння теорії пружності методом сплайн-апроксимації зведено до задачі на власні значення для систем звичайних диференціальних рівнянь по радіальній координаті. Розрахунки проводилися стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Наведено результати розрахунку частот ізотропного неоднорідного циліндра з різними умовами на торцях.

Решение динамических задач для толстостенных элементов конструкций в трехмерной постановке сопряжено со значительными трудностями, обусловленными сложностью системы исходных дифференциальных уравнений в частных производных, необходимостью удовлетворения краевым условиям на ограничивающих упругое тело поверхностях. Ряд численно-аналитических подходов к исследованию свободных колебаний цилиндров конечной длины предложен в работах [1–8].

В данной работе предлагается эффективная численная методика исследования собственных частот и форм осесимметричных колебаний сплошных цилиндров конечной длины при различных граничных условиях на торцах цилиндра, которая базируется на применении сплайн-аппроксимации в одном из координатных направлений и последующим решением краевой задачи на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка в общем случае с переменными коэффициентами устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Предложенная методика позволяет проводить исследования свободных колебаний цилиндров конечной длины в случае неоднородного материала.

Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим в цилиндрической системе координат r, θ, z сплошной цилиндр радиусом R, длиной L, изготовленный из изотропного материала. Исходные уравнения теории упругости для задачи о свободных осесимметричных радиально-продольных колебаниях такого цилиндра имеют вид (крутильные колебания в данной работе не рассматриваются):

соотношения Коши

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \qquad e_\theta = \frac{u_r}{r}; \\ e_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \qquad 2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \end{aligned} \tag{1}$$

закон Гука для изотропного тела

$$
\begin{aligned}
&e_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)]; \qquad e_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)];\\
&e_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)]; \qquad e_{rz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{rz},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где модуль Юнга $E = E(r, z)$ — непрерывная и дифференцируемая функция координат r и z;

уравнения движения:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2};\\
&\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь t — временная координата; $u_r(r, z, t)$ и $u_z(r, z, t)$ — проекции полного перемещения точек цилиндра в направлениях, касательных, соответственно, к координатным линиям r, z; e_r, e_θ, e_z — относительные линейные деформации в направлении координатных линий; e_{rz} — деформация сдвига; σ_r, σ_θ, σ_z — нормальные напряжения; σ_{rz} — касательное напряжение; плотность материала $\rho(r, z)$ — непрерывная функция координат r и z. На боковой поверхности цилиндра при $r = R$ в случае отсутствия напряжений граничные условия принимают следующий вид:

$$
\sigma_r(R, z, t) = 0, \qquad \sigma_{rz}(R, z, t) = 0. \tag{4}
$$

При $r = 0$ зададим условия

$$
u_r(0, z, t) = 0, \qquad \sigma_{rz}(0, z, t) = 0. \tag{5}
$$

На торцах $z = 0$ и $z = L$ рассмотрим следующие граничные условия:

$$
1)\ \sigma_r = 0, \quad u_r = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad u_r = 0; \tag{6}
$$

$$
2)\ \sigma_{rz} = 0, \quad u_z = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad u_z = 0; \tag{7}
$$

$$
3)\ u_r = 0, \quad u_z = 0. \tag{8}
$$

Предполагается, что все точки цилиндра совершают гармонические колебания с частотой ω, т. е.

$$
\{u_r(r, z, \theta), u_z(r, z, \theta)\} = \{\widehat{u}_r(r, z), \widehat{u}_z(r, z)\}\exp(i\omega t)
$$

(далее знак $\widehat{\ }$ опускается).

Запишем разрешающую систему уравнений в перемещениях в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} = a_{11}u_r + a_{12}\frac{\partial u_r}{\partial z} + a_{13}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + a_{14}\frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{15}\frac{\partial u_z}{\partial z} + a_{16}\frac{\partial u_z}{\partial r} + a_{17}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z};\\
&\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = a_{21}u_r + a_{22}\frac{\partial u_r}{\partial z} + a_{23}\frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{24}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z} + a_{25}u_z + a_{26}\frac{\partial u_z}{\partial z} + a_{27}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + a_{28}\frac{\partial u_z}{\partial r},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где коэффициенты $a_{11} = a_{11}(r, z, \omega)$, $a_{24} = a_{24}(r, z, \omega)$, $a_{kl} = a_{kl}(r, z)$ $(k, l) \in \{(k, l) \mid k = 1, 2;\ l = 1, \ldots, 7\} \setminus \{(1, 1), (2, 4)\} \bigcup \{(2, 8)\}$ при $r \neq 0$ определяются таким образом:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = -\frac{1}{(1-\nu)E}\frac{\partial E}{\partial r}\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\rho\omega^2; \qquad a_{12} = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)E}\frac{\partial E}{\partial z};\\
&a_{13} = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}; \qquad a_{14} = -\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{r}; \qquad a_{15} = -\frac{\nu}{(1-\nu)E}\frac{\partial E}{\partial r};\\
&a_{16} = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)E}\frac{\partial E}{\partial z}; \qquad a_{17} = -\frac{1}{2(1-\nu)}; \qquad a_{21} = -\frac{2\nu}{(1-2\nu)E}\frac{\partial E}{\partial z};\\
&a_{22} = -\left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{r}\right); \qquad a_{23} = -\frac{2\nu}{(1-2\nu)E}\frac{\partial E}{\partial z};\\
&a_{24} = -\frac{1}{1-2\nu}; \qquad a_{25} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\rho\omega^2; \qquad a_{26} = -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial E}{\partial z};\\
&a_{27} = -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}; \qquad a_{28} = -\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial r}\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

При $r = 0$ необходимо раскрыть неопределенности, учитывая, что если $r \to 0$, то

$$\frac{u_r}{r} \to \frac{\partial u_r}{\partial r}. \tag{11}$$

При этом из условий (5) и (11) следует, что

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = 0; \qquad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0; \qquad \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} = 0, \tag{12}$$

и коэффициенты a_{kl} в уравнениях (9) при ненулевых членах примут вид:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\rho\omega^2; \qquad a_{14} = -\frac{1}{(1-\nu)E}\frac{\partial E}{\partial r};\\
&a_{15} = -\frac{\nu}{(1-\nu)E}\frac{\partial E}{\partial r}; \qquad a_{23} = -\frac{4\nu}{(1-2\nu)E}\frac{\partial E}{\partial z}; \qquad a_{25} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\rho\omega^2;\\
&a_{26} = -\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)E}\frac{\partial E}{\partial z}; \qquad a_{27} = -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu},
\end{aligned} \tag{13}$$

а условия (5) с учетом (12) при $r = 0$ запишутся в виде

$$u_r = 0; \qquad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0. \tag{14}$$

Метод решения. Задачу (9) с соответствующими граничными условиями можно решить с использованием метода сплайн-коллокации [9–13]. Разрешающие функции $u_r(r, z)$, $u_z(r, z)$ представим в виде

$$u_r(r, z) = \sum_{i=0}^{N} u_{ri}(r)\varphi_{1i}(z); \qquad u_z(r, z) = \sum_{i=0}^{N} u_{zi}(r)\varphi_{2i}(z), \tag{15}$$

где u_{ri}, u_{zi} — искомые функции переменной r; $\varphi_{ji}(z)$ $(j = 1, 2;\ i = 1, \ldots, N)$ — линейные комбинации кубических B-сплайнов на равномерной сетке $\Delta\colon 0 = z_0 < z_1 < \cdots < z_N = L$ с учетом граничных условий при $z = 0$ и $z = L$. Подставляя представление (15) в уравнения (9), требуем их удовлетворения в заданных точках коллокации $\xi_k \in [0, L]$, $k = \overline{0, N}$ [12].

Если ввести обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_j = [\varphi_{ji}(\xi_k)], \qquad k, i = 0, \ldots, N, \qquad j = 1, 2,\\
&\overline{u}_r = \{u_{r0}, u_{r1}, \ldots, u_{rN}\}^T; \qquad \overline{\widetilde{u}_r} = \{\widetilde{u}_{r0}, \widetilde{u}_{r1}, \ldots, \widetilde{u}_{rN}\}^T;\\
&\overline{u}_z = \{u_{z0}, u_{z1}, \ldots, u_{zN}\}^T; \qquad \overline{\widetilde{u}_z} = \{\widetilde{u}_{z0}, \widetilde{u}_{z1}, \ldots, \widetilde{u}_{zN}\}^T;\\
&\overline{a}_{kl}^T = \{a_{kl}(r, \xi_0), a_{kl}(r, \xi_1), \ldots, a_{kl}(r, \xi_N)\},\\
&(k, l) \in \{(k, l) \mid k = 1, 2 \mid l = 1, \ldots, 7\} \setminus \{(1, 1), (2, 4)\} \bigcup (2, 8),\\
&\overline{a}_{11}^T = \{a_{11}(r, \xi_0, \omega), a_{11}(r, \xi_1, \omega), \ldots, a_{11}(r, \xi_N, \omega)\},\\
&\overline{a}_{24}^T = \{a_{24}(r, \xi_0, \omega), a_{24}(r, \xi_1, \omega), \ldots, a_{24}(r, \xi_N, \omega)\},
\end{aligned}
\tag{16}
$$

а также для матрицы $A = [a_{ij}]$ $\{i, j = 0, \ldots, N\}$ и вектора $\overline{c} = \{c_0, c_1, \ldots, c_N\}$ обозначить через $\overline{c} * A$ матрицу $[c_i a_{ij}]$, то система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $4(N + 1)$ относительно $\overline{u}_r$, $\overline{\widetilde{u}}_r$, u_z, $\overline{\widetilde{u}}_{zi}$ $(i = 0, \ldots, N)$ примет вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\overline{u_r}}{dr} = \overline{\widetilde{u}_r}; \qquad \frac{d\overline{u_z}}{dr} = \overline{\widetilde{u}_z};\\
&\frac{d\overline{\widetilde{u}_r}}{dr} = \Phi_1^{-1}(\overline{a}_{11} * \Phi_1 + \overline{a}_{12} * \Phi_1' + \overline{a}_{13} * \Phi_1'')\overline{u_r} + \Phi_1^{-1}(\overline{a}_{14} * \Phi_1)\overline{\widetilde{u}_r} +\\
&\qquad + \Phi_1^{-1}(\overline{a}_{15} * \Phi_2')\overline{u_z} + \Phi_1^{-1}(\overline{a}_{16} * \Phi_2 + \overline{a}_{17} * \Phi_2')\overline{\widetilde{u}_z};\\
&\frac{d\overline{\widetilde{u}_z}}{dr} = \Phi_2^{-1}(\overline{a}_{21} * \Phi_1 + \overline{a}_{22} * \Phi_1')\overline{u_r} + \Phi_2^{-1}(\overline{a}_{23} * \Phi_1')\overline{\widetilde{u}_r} +\\
&\qquad + \Phi_2^{-1}(\overline{a}_{24} * \Phi_2 + \overline{a}_{25} * \Phi_2' + \overline{a}_{26} * \Phi_2'')\overline{u}_z + \Phi_2^{-1}(\overline{a}_{27} * \Phi_2)\overline{\widetilde{u}_z}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Граничные условия при $r = R$ для данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать так:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\lambda}_{11}\Phi_1\overline{\widetilde{u}}_r + \overline{\lambda}_{12}\Phi_1\frac{1}{r}\overline{u}_r + \overline{\lambda}_{13}\Phi_2'\overline{u}_z = \overline{0};\\
&\overline{\lambda}_{55}\Phi_1'\overline{\widetilde{u}}_r + \overline{\lambda}_{55}\Phi_2\overline{\widetilde{u}}_z = \overline{0},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\overline{\lambda}_{1i}^T = \{\lambda_{1i}(R, \xi_0), \ldots, \lambda_{1i}(R, \xi_N)\} \qquad (i = 1, 2, 3);\\
&\overline{\lambda}_{55}^T = \{\lambda_{55}(R, \xi_0), \ldots, \lambda_{55}(R, \xi_N)\},
\end{aligned}
$$

а при $r = 0$

$$
\overline{\widetilde{u}}_z = \overline{0}; \qquad \overline{u}_r = \overline{0}. \tag{19}
$$

Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (17) с граничными условиями (18), (19) решалась методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [3].

Решение задачи. Анализ результатов. Для оценки точности предложенной методики приводилось сравнение (табл. 1) первых шести обезразмеренных частот $\varpi_k = \omega_k R\sqrt{\rho/G}$ ($k = \overline{1,6}$ — номер частоты) для "четных" [7] форм колебаний (u_z является четной функцией от z, u_r — нечетная функция от z) сплошного изотропного шарнирно опертого цилиндра с параметрами: $\nu = 0{,}3$, $R = 1$, $L = 4$, полученных с использованием метода сплайн-коллокации (МСК) при числе точек коллокации $N = 40$, и частот, полученных из характеристического уравнения Похгаммера–Кри с использованием функций Бесселя для волн в бесконечном цилиндре [7]. Волновое число при этом равнялось $\pi m/L$.

Сравнение частот при использовании данной методики и аналитического подхода в случае шарнирного опирания торцов позволяет сделать вывод о совпадении пяти знаков после запятой при $m = 1$, $m = 3$. Наибольшее расхождение частот наблюдается при $m = 5$ и может быть уменьшено с увеличением числа точек коллокации. В табл. 1 приведены также частоты для сплошного цилиндра с жестко защемленными торцами. При этом наблюдается увеличение частот при жестком защемлении по сравнению с частотами шарнирно опертого цилиндра.

Изучалось влияние неоднородности материала на частоты колебаний сплошного цилиндра с параметрами $\nu = 0{,}3$, $R = 1$, $L = 4$ и постоянной плотностью материала. Закон изменения модуля Юнга выбирался в виде:

$$E(r,z) = \left(\alpha\left(\frac{6z^2}{L^2} - \frac{6z}{L} + 1\right) + 1\right)E_0. \tag{20}$$

(При этом средний модуль Юнга остается постоянным и равным E_0 для всех возможных значений параметра α.) В табл. 2 представлены частоты $\varpi = \omega R\sqrt{\rho/G_0}$ колебаний такого цилиндра с шарнирно опертыми краями (условия Ш-Ш) и жестко защемленными торцами

Таблица 1

k	Шарнирное опирание торцов			Жесткое защемление МСК, ϖ_k
	m	Уравнения Похгаммера–Кри, ϖ_k	Использование МСК, ϖ_k	
1	1	1,24699	1,24699	1,2842
2	3	2,99449	2,99448	3,1668
3	1	3,58383	3,58383	3,7110
4	5	4,02260	4,02272	4,2534
5	3	4,44840	4,44840	4,4823
6	1	4,47727	4,47727	4,8424

Таблица 2

Тип граничных условий	ϖ	$\alpha = 0$	$\alpha = 0{,}3$	$\alpha = 0{,}6$
Ш-Ш	ϖ_1	1,2469	1,2935	1,3218
	ϖ_2	2,9944	2,9747	2,8972
	ϖ_3	3,5838	3,5615	3,4515
Ж-Ж	ϖ_1	1,2842	1,3259	1,3493
	ϖ_2	3,1668	3,0908	2,9764
	ϖ_3	3,7110	3,6451	3,5064

(Ж-Ж) для различных значений параметра α. Случай $\alpha = 0$ соответствует однородному материалу.

С увеличением параметра α наблюдается рост первой частоты и убывание второй и третьей частот как для случая шарнирно опертых торцов, так и для жестко защемленных торцов.

1. *Григоренко А. Я.* Численное решение задачи о свободных осесимметричных колебаниях полого ортотропного цилиндра при различном закреплении торцов // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 5. – С. 49–54.
2. *Григоренко А. Я., Дыяк И. И., Макар В. М.* Влияние анизотропии на динамические характеристики свободных колебаний конечных цилиндров // Там же. – 2001. – **37**, № 5. – С. 44–51.
3. *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
4. *Grigorenko A. Ya.* Numerical solution of stationary dynamic processes in anisotropic inhomogeneous cylinders // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No 8. – P. 831–836.
5. *Loy C. T., Lam K. Y.* Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity // J. Sound and Vibration. – 1999. – **226**, No 4. – P. 719–737.
6. *Heyliger P. R.* Axisymmetric free vibration of finite anisotropic cylinders // Ibid. – 1991. – **148**, No 3. – P. 507–520.
7. *Hutchinson J. R.* Axisymmetric vibration of free finite-length rod // J. of Acoust. Soc. of Amer. – 1972. – **51**. – P. 223–240.
8. *Wang H., Williams K.* Vibrational modes of thick cylinders of finite length // J. Sound and Vibration. – 1996. – **191**, No 5. – P. 955–971.
9. *Авраменко О. А.* О влиянии локальных нагрузок на напряженно-деформированное состояние нетонких ортотропных конических оболочек // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 8. – С. 103–113.
10. *Будак В. Д., Григоренко А. Я., Пузырев С. И.* О свободных колебаниях прямоугольных в плане ортотропных пологих оболочек переменной толщины // Там же. – 2007. – **43**, № 6. – С. 102–115.
11. *Будак В. Д., Григоренко А. Я., Пузырев С. И.* Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины // Там же. – № 4. – С. 89–98.
12. *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л.* Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Там же. – 2008. – **44**, № 10. – С. 74–85.
13. *Григоренко А. Я., Яремченко Н. П.* О напряженном состоянии прямоугольных в плане нетонких ортотропных оболочек переменной толщины // Там же. – № 8. – С. 91–102.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 03.12.2008

A. Ya. Grigorenko, T. L. Efimova

About an approach to solving the problem on free vibrations of a solid inhomogeneous finite-length cylinder

A problem on natural vibrations of a solid cylinder under various boundary conditions of its end-faces is considered on the basis of 3D elasticity theory. Using the spline-approximation and collocation, the original partial equations of elasticity theory are reduced to the problem for eigenvalues for the high-order systems of ordinary differential equations by the radial coordinate. The problems are solved by the steady-state numerical method of discrete orthogonalization with incremental search. The calculation results are presented for the case of an isotropic inhomogeneous cylinder for different boundary conditions on its end-faces.