УДК 519.81

В. М. Михалевич

К моделированию ситуации в задаче принятия решения с денежными доходами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Чикрием)

Досліджується система прийняття рішень, ситуація в якій має числові наслідки з природним порядком як відношення переваг того, хто приймає рішення на них. При запропонованій інтерпретації виділяється досить широкий клас ситуацій, в яких той, хто приймає рішення, при погодженні з досить природними умовами може використовувати критерій вказаного виду, який залежить лише від закономірності, що описує випадковість в широкому сенсі — закономірність масового явища, що являє собою стан природи. Одержаний результат використовується автором при аналізі дій того, хто приймає рішення, в ситуації з наслідками довільного виду.

В работе анализируется и моделируется ситуация задачи принятия решения с денежными доходами, что является продолжением и обобщением соответствующих результатов работ [1] и [2].

Через $B_0(\Theta)$, или просто B_0 в контексте Θ, обозначим множество всех конечнозначных Σ-измеримых функций на Θ, т. е.

$$B_0(\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in B(\Theta)\colon\ \operatorname{Card} f(\Theta) < \infty\}.$$

А через $B_0(a, b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a), b > 0$ будем обозначать множество всех конечнозначных Σ-измеримых функций на Θ со значениями в интервале $[a, b]$, т. е. $B_0(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{R}^\Theta\colon f \in B_0, f(\Theta) = \operatorname{co}[f(\Theta)], \overline{f(\Theta)} = [a, b]\}$.

Пусть L — произвольное выпуклое множество таких Σ-измеримых ограниченных функций на Θ, что найдутся a, $b \in \mathbb{R}$, для которых множество $B_0(a, b)$ содержится в L, т. е.

$$B_0(a, b) \subseteq L = \operatorname{co} L \subseteq B. \tag{1}$$

Далее обозначим через $V(L)$ класс всех функционалов υ на L, т. е. $\upsilon\colon L \to \mathbb{R}$, а через $V_0(L) \subset V(L)$, удовлетворяющих для любых f_1, $f_2 \in L$ следующим условиям:

V1. если $f_1(\theta) \leqslant f_2(\theta)\ \forall\, \theta \in \Theta$, то

$$\upsilon(f_1) \leqslant \upsilon(f_2);$$

V2. если a', $b' \in \mathbb{R}$, $a' \geqslant 0$ и $f_1(\theta) = a' f_2(\theta) + b'\ \forall\, \theta \in \Theta$, то

$$\upsilon(f_1) = a'\upsilon(f_2) + b';$$

V3. $\upsilon(f_1) + \upsilon(f_2) \geqslant 2\upsilon\left(\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2\right)$.

Лемма 1. *Условие* ***V2*** *эквивалентно условию*

V2′. *если* $\alpha,\ b_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1)$, $(b_1/(1-\alpha))_\Theta \in B_0(a,b)$ *и* $f_1(\theta) = \alpha f_2(\theta) + b_1\ \forall\,\theta \in \Theta$, *то*

$$v(f_1) = \alpha(f_2) + b_1.$$

Выберем теперь ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta)$ таким образом. В качестве множества U возьмем множество L, а $g(\theta, f) \overset{\mathrm{def}}{=} f(\theta)\ \forall\, f \in L,\ \forall\,\theta \in \Theta$. Такую ССЗР будем обозначать $Z_0(L)$, или просто Z_0, в контексте фиксированного множества L.

Определение 1. *Правилом выбора критерия* (ПВК) для ССЗР из класса $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть всякое отображение π, определенное на $\mathbb{Z}'(\Theta)$ и сопоставляющее каждой $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$ некоторую действительную функцию $g_Z^*(\cdot)$, определенную на U.

Класс всех ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$ обозначим через $\Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ и при этом будем относить к $\Pi_0(\mathbb{Z}'(\Theta)) \subset \Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, удовлетворяющие следующим условиям:

У1. если $Z_1 = (\Theta, U_1, g_1) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $Z_2 = (\Theta, U_2, g_2) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $U_1 \subseteq U_2$ и $g_1(\theta, u) = g_2(\theta, u)$, $\forall\,\theta \in \Theta$, $\forall\, u \in U_1$, то

$$g_{Z_1}^*(u) = g_{Z_2}^*(u), \qquad \forall\, u \in U_1;$$

У2. если $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i \in U$, $i = \overline{1,2}$ и $g(\theta, u_1) \leqslant g(\theta, u_2)$, $\forall\,\theta \in \Theta$, то

$$g_Z^*(u_1) \leqslant g_Z^*(u_2);$$

У3. если $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i \in U$, $i = \overline{1,2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$ и $g(\theta, u_1) = ag(\theta, u_2) + b$, $\forall\,\theta \in \Theta$, то

$$g_Z^*(u_1) = ag_Z^*(u_2) + b;$$

У4. если $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i \in U$, $i = \overline{1,3}$ и $g(\theta, u_1) + g(\theta, u_2) = 2g(\theta, u_3)$, $\forall\,\theta \in \Theta$, то

$$g_Z^*(u_1) + g_Z^*(u_2) \geqslant 2g_Z^*(u_3).$$

Определение 2. ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть определяющей, если найдутся $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \in (a, b)$, что

$$B_0(a,b) \subseteq g(\cdot, U) = \mathrm{co}[g(\cdot, U)] \subseteq B. \tag{2}$$

Далее для ССЗР $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ будем относить к $\overline{\Pi}_0(\mathbb{Z}'(\Theta)) \subseteq \Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые для любой определяющей ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$ удовлетворяют условиям **У2**, **У4**. Таким образом ослабленные условия мы будем обозначать **У2′** и **У4′** соответственно. Ясно, что $\overline{\Pi}_0(\mathbb{Z}'(\Theta)) \supseteq \Pi_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$. А через $\Pi_{01}(\mathbb{Z}'(\Theta)) \subseteq \overline{\Pi}_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$ обозначим все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые удовлетворяют еще следующим условиям:

У1′. если $Z_1 = (\Theta, U_1, g_1) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $Z_2 = (\Theta, U_2, g_2) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $g_1(\theta, u_1) = g_2(\theta, u_2)\ \forall\,\theta \in \Theta$, то

$$g_{Z_1}^*(u_1) = g_{Z_2}^*(u_2);$$

У3′. если $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$ — определяющая, $u_i \in U$, $i = \overline{1,3}$, $\alpha \in [0,1]$, $g(\cdot, u_3) = c_\Theta$ и для любых $\theta \in \Theta$ $g(\theta, u_1) = \alpha g(\theta, u_2) + (1-\alpha)c$, то

$$g_Z^*(u_1) = \alpha g_Z^*(u_2) + (1-\alpha)c.$$

Замечание. В случае, когда $\mathbb{Z}'(\Theta)$ совпадает с $\mathbb{Z}_\sharp(\Theta) := \{Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta) \colon g(\cdot, u) \in \in B, \forall\, u \in U\}$ и $\Sigma = 2^\Theta$, то условие **У1′** следует из условий **У1**, **У2**, **У3**, **У4**.

Кроме того, очевидно, что из условий **У2**, **У3**, **У4** следуют условия **У2′**, **У3′**, **У4′**, соответственно.

Класс всех ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые удовлетворяют условию **У1′**, а также ослабленным условиям **У2′**, **У3′**, **У4′** тем, что требования этих условий распространяются лишь на $g \in \in B_0(\Theta)$, будем обозначать через $\Pi_{02}(\mathbb{Z}'(\Theta))$.

Ясно, что $\Pi_{01}(\mathbb{Z}'(\Theta)) \subseteq \Pi_{02}(\mathbb{Z}'(\Theta))$.

Наконец введем в рассмотрение отображение $\chi \colon V(L) \to \Pi(\{Z_0(L)\})$. Это отображение определим следующим образом. Если $\pi = \chi(\upsilon)$, $\upsilon \in V(L)$, то

$$[\pi(Z_0)](f) = \upsilon(f) \quad \forall\, f \in L.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого L, определенного согласно* (1)*,*

$$\chi(V_0(L)) = \Pi_{01}(\{Z_0(L)\}).$$

Из теоремы 1 и того, что $\Pi_{01}(\{Z_0(L)\}) = \Pi_{02}(\{Z_0(L)\})$ (см. [1], теорема 2), получаем

Следствие 1. *Для любого L, определенного согласно* (1)*,*

$$\chi(V_0(L)) = \Pi_{02}(\{Z_0(L)\}).$$

Из теоремы 1 и того, что $\eta_{\{Z'\}}(P(\Theta)) = \Pi_{01}(\{Z'\})$ (см. [1], следствие 2.3) при $Z' = Z_0(L)$ также получаем

Следствие 2. *Если для L выполняется* (1)*, то*

$$\eta_{\{Z_o(L)\}}(P(\Theta)) = \chi(V_0(L)).$$

Теорема 2. *Существует единственное расширение $\overline{\upsilon}$ всякого функционала $\upsilon \in \in V_0(B_0(a, b))$ на L, при котором $\overline{\upsilon} \in V_0(L)$.*

Теорема 3. *Для произвольного непустого множества Θ функционал υ на L удовлетворяет условиям **V1**, **V2** и условию*

***V3′**. если f_1, $f_2 \in L$, то*

$$\upsilon(f_1) + \upsilon(f_2) \leqslant 2\upsilon\left(\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2\right)$$

(класс таких функционалов будем обозначать через $V_0'(L)$) тогда и только тогда, когда найдется статистическая закономерность P на Θ, что $\forall\, f \in L$ имеет место

$$\upsilon(f) = \min_{p \in P} \int\limits_\Theta f(\theta) p(d\theta).$$

Рассмотрим отображение $\psi \colon V(L) \to V(-L)$, определяемое следующим образом. Если $\omega \in V(L)$, $\psi(\omega) = \upsilon$, то $\upsilon(-f) = -\omega(f)$, $\forall\, f \in L$.

Лемма 2. $\psi(V_0'(L)) = V_0(-L)$.

Теорема 4. *Существует единственное расширение $\overline{\upsilon}$ всякого функционала $\upsilon \in \in V_0'(B_0(a, b))$ на L, при котором $\overline{\upsilon} \in V_0'(L)$.*

1. *Иваненко В. И., Лабковский В. А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решений. – Киев: Наук. думка, 1990. – 135 с.
2. *Михалевич В. М.* К моделированию ситуации в задаче решения с денежными потерями // Доп. НАН України. – 2010. – № 11. – С. 30–34.

НУ "Киево-могилянская академия"
Поступило в редакцию 26.04.2010

V. M. Mikhalevich

On the modeling of situations in the decision-making problem with monetary incomes

A decision-making system having its situation with numerical consequences in natural order, adopting preference relations as decisions upon themselves, is studied. The interpretation suggested selects a broad enough class of situations, where the decision maker, while being consistent with some quite natural conditions, can use the indicated criterion type, depending on the regularity which defines the randomness in general, i. e. the regularity of a mass event representing a state of the world. The obtained results are used to analyze the actions of a decision-maker in a situation with random-type consequences.