УДК 539.375

А. О. Камінський, М. Ф. Селіванов

Про вплив на концентрацію напружень біля еліптичного отвору в пластині з композитного матеріалу в'язкопружних властивостей компонентів композита

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

Досліджено зміну з часом напружень на контурі еліптичного отвору в композитній пластині. Вивчено вплив співвідношень між модулями ізотропних в'язкопружних матеріалів компонент композита на напруження як функції часу. Розв'язок отримано в рамках пружно-в'язкопружної аналогії. Наведено результати, які свідчать про те, що при врахуванні в'язкопружних властивостей обох компонентів композита може виникнути ситуація, коли напруження у деяких точках контуру отвору є немонотонними з часом і екстремум досягається на часовому інтервалі проведення досліджень.

У другій половині 20-го сторіччя інтенсивно проводилися дослідження концентрації напружень біля отворів в пластинах і оболонках, виготовлених з в'язкопружних анізотропних матеріалів. При дослідженні композитів, в основному, розглядалися такі, що складаються з пружної арматури (скло, вуглеволокно) і в'язкопружного наповнювача (епоксидної смоли або інших сполучників) [1]. Різниця між миттєвими і довготривалими модулями цих композитів була незначною і процес повзучості проходив порівняно невеликий, відносно часу експлуатації, проміжок часу. Тому для дослідження напруженого стану в таких композитах використовувалися лише граничні значення характеристик повзучості: миттєве і довготривале [2, 3].

Застосування в сучасній промисловості нових матеріалів, які виявляють в'язкопружні властивості під час усього часу експлуатації, призвело до більш уважного ставлення до описання релаксації чи повзучості таких матеріалів. З огляду на велику різницю між миттєвими і довготривалими модулями матеріалу важливим фактором в описі його механічних властивостей став час. Інформативними стали не тільки граничні значення модулів, а й їх значення під час деформування. Важливість отримання з достатньою точністю проміжних значень модулів зумовлена тим, що в багатьох дослідженнях проводиться моделювання механічних властивостей композитів на основі матеріалів, що виявляють в'язкопружні властивості. Властивості композитів, в свою чергу, використовуються для досліджень напружено-деформованого стану елементів конструкцій. Особливо уважно до таких досліджень треба підходити, коли з часом змінюються характеристики обох компонентів композита. Зміна різниці між модулями двох матеріалів з часом зумовлює відмінну поведінку параметрів напруженого стану від тієї, що виникає при врахуванні властивостей спадковості лише матеріалу наповнювача.

В роботі досліджено вплив розбіжностей між релаксаційними властивостями наповнювача і армуючого матеріалу на напружений стан поблизу еліптичного отвору в пластині, що перебуває в умові плоского напруженого стану. Властивості наповнювача зафіксовані; як модулі використані такі, що отримані за допомогою однієї функції Міттаг–Леффлера.

Модуль армуючого матеріалу моделюється зміщенням модуля наповнювача в горизонтальному і вертикальному напрямках, а також зміною відношення граничних в часі модулів. Це дозволило виявити вплив співвідношення між модулями на напружений стан.

Розглядається матеріал, армований однотипними включеннями (еліпсоїдами обертання) з однонапрямленою віссю симетрії. При моделюванні властивостей композита змінними параметрами є концентрація включень і відношення довжини до ширини для включення. При дослідженні напруженого стану змінними параметрами моделі є довжина напівосей еліпса, кут нахилу до горизонтальної осі прикладеного на нескінченності навантаження, а також кут нахилу осі анізотропії. Розв'язання задачі проведено в рамках пружно-в'язкопружної аналогії, яка базується на перетворенні Лапласа [4]. Розв'язки в часовій області отримано методом, що розвивається в роботі авторів і базується на представленні розв'язку в області перетворення раціональною функцією. Одержані результати вказують на ті небезпечні параметри різниці між властивостями матеріалів компонент композита, при яких напруження в точці околу отвору є немонотонним з часом і досягає свого максимуму всередині часового інтервалу, на якому шукається розв'язок задачі.

1. В'язкопружне деформування матеріалів компонент композита. Будемо описувати зміну модуля Юнга матеріалів компонент композита з часом у формі

$$E^{(i)}(t) = E_{\infty}^{(i)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^{(i)}}{\beta_k^{(i)}} \mathrm{E}_{\alpha,1}(-\beta_k^{(i)} t^{\alpha}), \tag{1}$$

де E_{∞} — довготривале значення модуля; індекс $i = 1$ відповідає характеристиці матеріалу армування, $i = 2$ — наповнювача;

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} - \tag{2}$$

функція Міттаг–Леффлера; Γ — гама-функція Ейлера. При $\alpha = 1$ і $\beta = 1$ функція (2) перетворюється на експоненційну.

Будемо вивчати якісну сторону задачі, тому задовольнимося лише одним доданком у виразі (1), до того ж до спрощення віднесемо описання релаксаційних властивостей обох матеріалів компонентів композита за допомогою одного і того ж параметра α функції (2). За цих умов вираз (1) в області перетворення набуде вигляду

$$\widetilde{E}^{(i)}(s) = E_{\infty}^{(i)} + (E_0^{(i)} - E_{\infty}^{(i)}) \frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha} + \beta^{(i)}}, \tag{3}$$

де $\widetilde{E}(s) = s\overline{E}(s)$, $\overline{E}(s)$ — перетворення Лапласа функції $E(t)$; E_0 — миттєве значення модуля.

Вважатимемо об'ємну деформацію пружною; це дозволить записати коефіцієнти Пуассона матеріалів у вигляді

$$\widetilde{\nu}^{(i)} = \frac{1}{2}\left[1 - (1 - 2\nu_0^{(i)}) \frac{\widetilde{E}_0^{(i)}}{E^{(i)}}\right].$$

Зафіксуємо характеристики матеріалу наповнювача та введемо коефіцієнти, що характеризують взаємне розташування залежностей від часу для модулів в'язкопружності матеріалів армування і наповнювача

$$k_E = \lg \frac{E_0^{(1)}}{E_0^{(2)}}, \qquad k_1 = \lg \frac{E_0^{(1)}}{E_{\infty}^{(1)}}, \qquad k_{\beta} = -\frac{1}{\alpha} \lg \frac{\beta^{(1)}}{\beta^{(2)}}. \tag{4}$$

Перший з коефіцієнтів визначає співвідношення між миттєвим модулем Юнга матеріалів армуючих елементів і матриці, другий — відношення миттєвого та довготривалого модулів Юнга для матеріалу армування, третій — зсув в додатному напрямку осі часу кривої, що описує зміну в часі модуля матеріалу армування відносно залежності, що описує зміну в часі модуля матеріалу наповнювача.

2. Побудова розв'язку у часовій області. Для отримання ефективних пружних модулів композитного матеріалу скористаємося результатами роботи [5], пружне поле напружень знайдемо, використовуючи результати роботи [1]. Структура цих розв'язків наведена нижче. Згідно з принципом пружно-в'язкопружної аналогії, замінюючи залежні від часу характеристики релаксації відповідними перетвореними величинами, отримаємо розв'язок $\tilde{\sigma}$ в області перетворення. Напруження як функцію часу знайдемо за допомогою оберненого перетворення Лапласа

$$\sigma_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\tilde{\sigma}_{ij}(s)\right].$$

За аналогією з формою представлення модуля релаксації матеріалів (1), будемо шукати представлення функції напруження в області перетворення в такій формі

$$\tilde{\sigma}_{ij}(s) = \widetilde{\sigma}_{\infty}^{(ij)} + \sum_k \frac{\lambda_k^{(ij)} s^{\alpha}}{s^{\alpha} + \beta_k^{(ij)}}, \tag{5}$$

щоб в часовій області

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{\infty}^{(ij)} + \sum_k \frac{\lambda_k^{(ij)}}{\beta_k^{(ij)}} \mathrm{E}_{\alpha,1}(-\beta_k^{(ij)} t^{\alpha}).$$

Питання побудови розв'язку в часовій області розглянуто в роботі [6].

3. Пружний розв'язок задачі. Нехай вісь анізотропії збігається з напрямком осі z. Визначальні співвідношення в трансверсально ізотропному тілі запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \lambda_{11}\varepsilon_x + \lambda_{12}\varepsilon_y + \lambda_{13}\varepsilon_z, \qquad \tau_{yz} = \lambda_{44}\gamma_{yz};\\ &\sigma_y = \lambda_{12}\varepsilon_x + \lambda_{11}\varepsilon_y + \lambda_{13}\varepsilon_z, \qquad \tau_{zx} = \lambda_{44}\gamma_{zx};\\ &\sigma_z = \lambda_{13}\varepsilon_x + \lambda_{13}\varepsilon_y + \lambda_{33}\varepsilon_z, \qquad \tau_{xy} = \lambda_{66}\gamma_{xy}. \end{aligned} \tag{6}$$

Як матеріал досліджуватимемо дискретно-волокнистий композит з орієнтованими вздовж осі z сфероїдальними волокнами. Такий композит в макрооб'ємі має осьову симетрію і, згідно з результатами роботи [5], може бути охарактеризованим п'ятьма пружними сталими λ_{11}, λ_{12}, λ_{13}, λ_{33}, λ_{44}, які є функціями механічних характеристик матеріалів компонент композита (в задачі, що розглядається, ці матеріали є ізотропними з заданими характеристиками $E^{(i)}$, $\nu^{(i)}$), об'ємного вмісту армуючої фази, c_1 та геометричного параметра включення, k (відношення повздовжнього розміру до поперечного розміру еліпсоїда обертання, яким включення моделюється).

Залишаючи модулі λ_{ij} у вигляді, що відповідає визначальним співвідношенням (6), перепишемо ці співвідношення для випадку, коли вісь анізотропії збігається з віссю x ($x \to y$, $y \to z$, $z \to x$), і розв'яжемо отримані співвідношення відносно деформацій. Одержимо

$$\varepsilon_x = A_{33}\sigma_x + A_{13}\sigma_y + A_{13}\sigma_z, \qquad \gamma_{yz} = A_{66}\tau_{yz},$$

$$\varepsilon_y = A_{13}\sigma_x + A_{11}\sigma_y + A_{12}\sigma_z, \qquad \gamma_{zx} = A_{44}\tau_{zx},$$

$$\varepsilon_z = A_{13}\sigma_x + A_{12}\sigma_y + A_{11}\sigma_z, \qquad \gamma_{xy} = A_{44}\tau_{xy},$$

де $A_{11} = \Delta_{11}/\Delta$, $A_{12} = -\Delta_{12}/\Delta$, $A_{13} = -\Delta_{13}/\Delta$, $A_{33} = \Delta_{33}/\Delta$, $A_{44} = 1/\lambda_{44}$,

$$\Delta_{11} = \lambda_{11}\lambda_{33} - \lambda_{13}^2, \qquad \Delta_{13} = \lambda_{13}(\lambda_{11} - \lambda_{12}),$$

$$\Delta_{12} = \lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{13}^2, \qquad \Delta_{33} = \lambda_{11}^2 - \lambda_{12}^2, \qquad \Delta = \Delta_{33}\lambda_{33} - 2\lambda_{13}\Delta_{13}.$$

За умовою плоского напруженого стану $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ і визначальні співвідношення набудуть вигляду

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y, \qquad \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y, \qquad \gamma_{xy} = a_{66}\tau_{xy}, \tag{7}$$

де $a_{11} = A_{33}$, $a_{12} = A_{13}$, $a_{22} = A_{11}$, $a_{66} = A_{44}$.

При повороті системи координат xyz навколо осі z на кут φ визначальні співвідношення (7) набудуть вигляду

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy},$$

$$\gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy},$$

де пружні сталі набудуть вигляду згідно з [7].

З напружень у полярній системі координат σ_r, $\tau_{r\vartheta}$ та σ_ϑ наведемо лише останнє

$$\sigma_\vartheta = 2\mathrm{Re}[(\cos\vartheta + s_1\sin\vartheta)^2\varphi'(z_1) + (\cos\vartheta + s_2\sin\vartheta)^2\psi'(z_2)],$$

де функції $\varphi(z_1)$ і $\psi(z_2)$ залежать від довжин півосей еліпса, інтенсивності зовнішнього навантаження p та кута нахилу напрямку його прикладання α, а також від $s_1 = \alpha_1 + \beta_1$ і $s_2 = \alpha_2 + \beta_2$ — коренів характеристичного рівняння основного диференціального рівняння плоскої задачі теорії пружності, яке має задовольняти функція напружень

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0. \tag{8}$$

Відзначимо, що у випадку, коли осі ортотропії збігаються з напрямками осей координат, рівняння (8) має чисто уявні корені, що дозволяє подати розв'язок у більш компактній формі.

4. Аналіз отриманих результатів. Як було запропоновано, для отримання чисельних результатів фіксуватимемо залежність модуля Юнга матеріалу наповнювача від часу, а співвідношення модулів Юнга армуючого матеріалу і матеріалу наповнювача визначатимемо коефіцієнтами (4). Для матриці візьмемо

$$E_0^{(2)} = 4\cdot 10^9\ \text{Па}, \qquad \nu_0^{(2)} = 0{,}35, \qquad \lg\frac{E_0^{(2)}}{E_\infty^{(2)}} = 3, \qquad \beta^{(2)} = 10^{-1}\ \text{с}^{-\alpha}, \qquad \alpha = 0{,}5,$$

а для наповнювача зафіксуємо $\nu_0^{(1)} = 0{,}3$.

Дослідимо напружений стан в однонапрямлено армованому композиті з об'ємним вмістом армуючого компонента $c_1 = 0{,}33$, відношенням довжини до ширини волокон $k = 100$

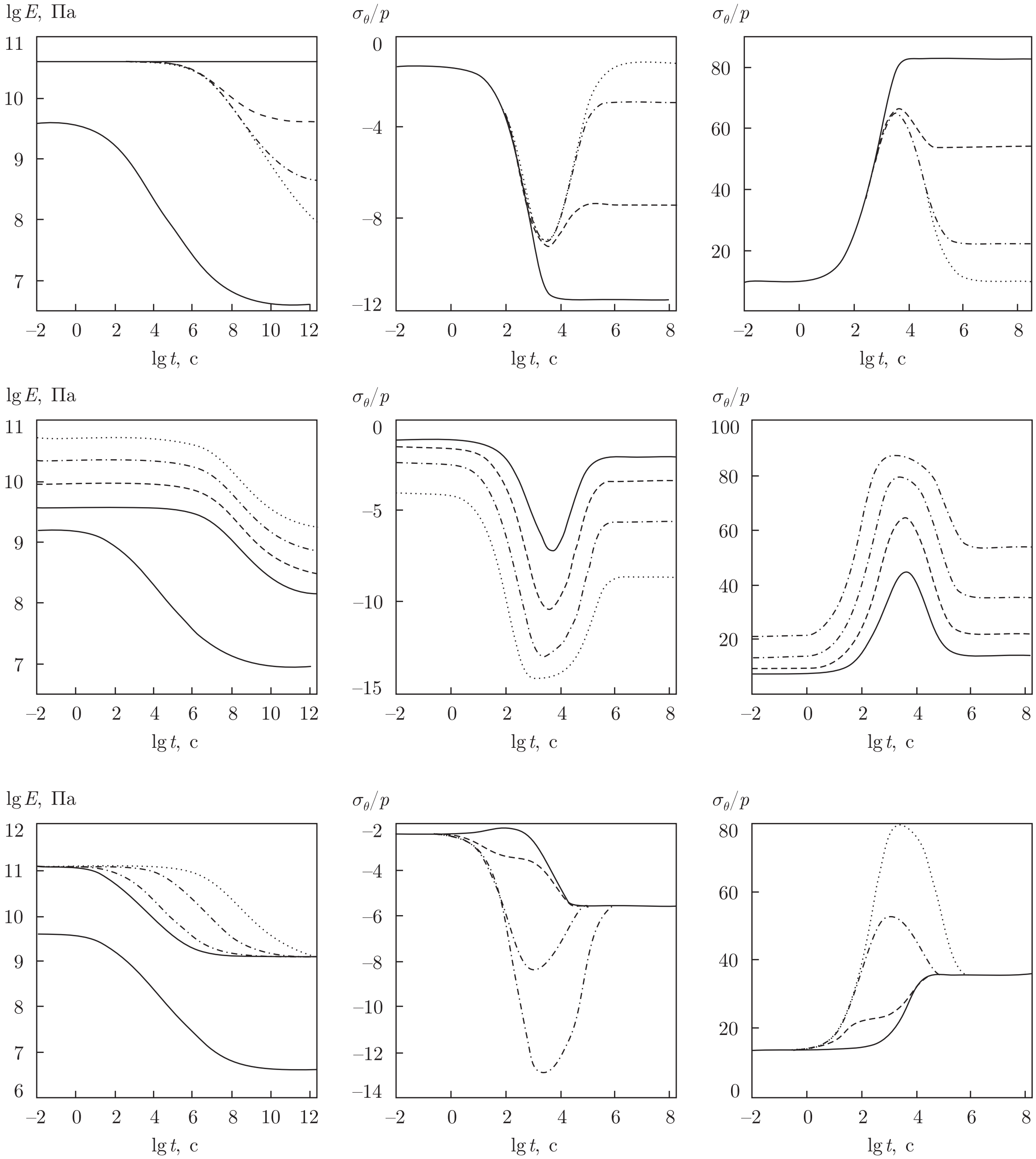

Рис. 1

(тобто волокна вважатимемо довгими). Відношення більшої напівосі еліпса до меншої зафіксуємо на рівні $a/b = 3$.

Вивчимо залежність від часу напруження σ_θ в точці з координатами $\rho = 1$, $\theta = 0$ для двох напрямків дії зовнішнього навантаження. Всі залежності другого стовпця рис. 1 отримані для $\alpha = 0$, третього — для $\alpha = \pi/2$. В першому рядку графіків на рис. 1 відображена зміна з часом модулів матеріалів компонент композита та напруження в точці контуру еліпса в цьому композитному матеріалі для $k_\beta = 5$, $k_E = 1$. На всіх рисунках першого рядка суцільні криві відповідають $k_1 = 0$ (матеріал волокон є пружним), штрихові криві — $k_1 = 1$,

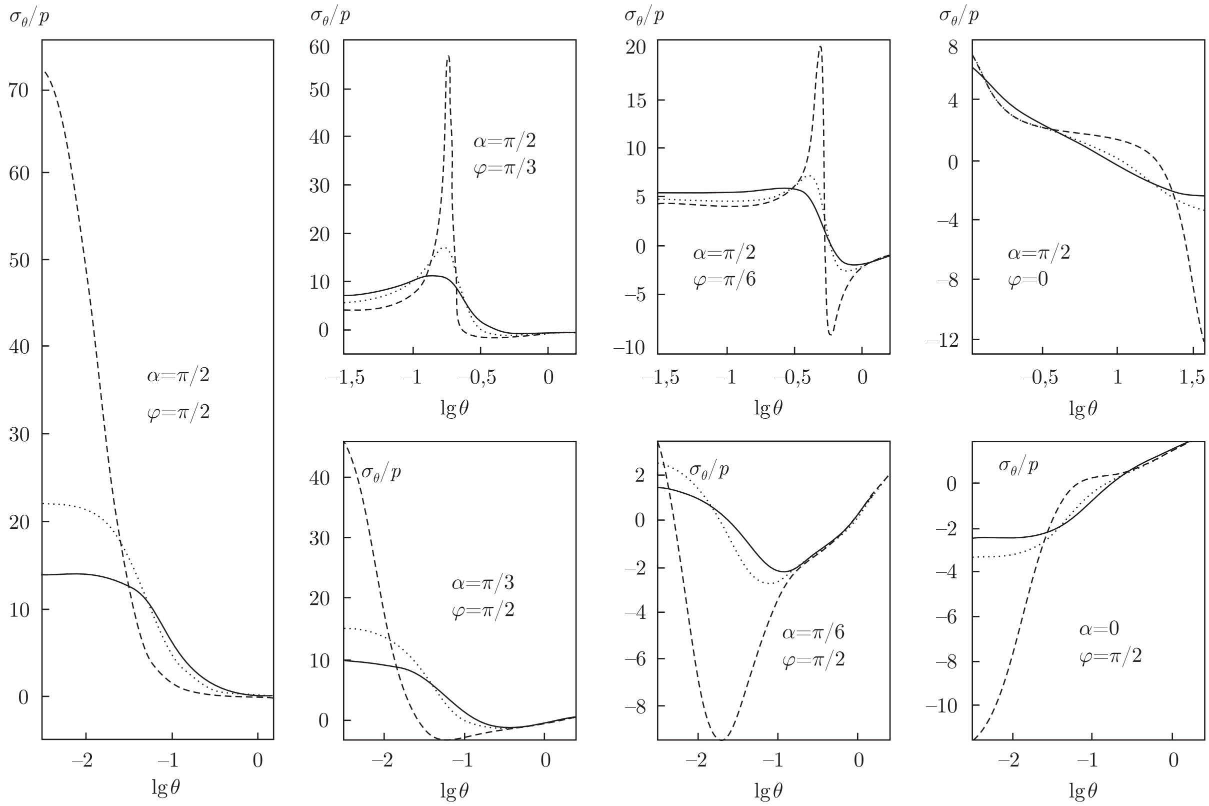

Рис. 2

штрихпунктирні — $k_1 = 2$, пунктирні — $k_1 = 3$. Другий рядок графіків на рис. 1 відповідає $k_1 = 2$, $k_\beta = 5$, суцільні криві — $k_E = 0{,}5$, штрихові — $k_E = 1$, штрихпунктирні — $k_E = 1{,}5$, пунктирні — $k_E = 2$. Третій рядок графіків на рис. 1 відповідає $k_1 = 2$, $k_E = 1{,}5$, суцільні криві — $k_\beta = 0$, штрихові — $k_\beta = 1$, штрихпунктирні — $k_\beta = 3$, пунктирні — $k_\beta = 5$.

На рис. 2 для вказаних комбінацій кутів α (кут, що визначає напрямок прикладання зовнішнього навантаження) і φ (кут, що визначає напрямок армування) проілюстрована зміна напружень на контурі отвору для трьох фіксованих моментів часу $t = 1$ с (суцільні криві), $t = 10^4$ с (штрихові криві) та $t = 10^8$ с (пунктирні криві).

Аналіз рисунків дає можливість зробити висновок про те, що напруження при немонотонній зміні співвідношення між модулями матеріалів компонент композита призводить до того, що напруження в точці околу еліптичного отвору також перестає бути монотонним і може досягнути екстремуму на дослідженому інтервалі зміни часу.

1. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
2. *Механика* композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т // Под ред. А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1983.
3. *Ван Фо Фы Г. А.* Композиционные материалы волокнистого строения. – Киев: Наук. думка, 1970. – 404 с.
4. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – Москва: Мир, 1982. – 336 с.
5. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикула Е. Н., Назаренко Л. В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов // Механика композитов: В 12 т. Т. 3. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с.

6. *Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Чорноіван Ю. О.* Визначення ефективних характеристик в'язкопружного композиту, релаксація компонент якого описується експонентами різних дробових порядків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 7–18.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 28.04.2009

A. O. Kaminsky, M. F. Selivanov

On the effect of viscoelastic properties of components of a composite on the stress concentration near an elliptic hole in the composite plate

The stress on the boundary of an elliptic hole in the composite plate is investigated in a time domain. The effect of the time-dependent ratio between the moduli of composite phases on the stress is studied. A solution is found with the help of the elastic-viscoelastic analogy. The results show a possibility of the situation where the stress at some points varies nonmonotonically with time, and the extremum is reached inside the time interval where the investigation is made.