Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 512.64

Н. С. Джалюк

Однозначність клітково-трикутних факторизацій матриць над кільцями головних ідеалів

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

Встановлено необхідні і достатні умови однозначності з точністю до асоційовності клітково-трикутних факторизацій клітково-трикутних матриць над областями головних ідеалів, що відповідають факторизаціям їх діагональних кліток.

Факторизації матриць кліткової структури, зокрема клітково-діагонального та клітково-трикутного виглядів над кільцями многочленів, вивчались у роботах [1–3], де вказані умови, за яких унітальні множники у факторизаціях таких матриць мають відповідний клітковий вигляд. У зв'язку з відшуканням повних наборів розв'язків матричних многочленних рівнянь, в [4] досліджувались факторизації клітково-діагональних многочленних матриць з діагональними клітками трикутної форми. У [5] встановлені умови існування єдиних з точністю до асоційовності дільників та факторизацій матриць над кільцем головних ідеалів, множники в яких мають задані канонічні діагональні форми. У роботі [6] знайдені умови, за яких клітково-діагональні та клітково-трикутні матриці над кільцями головних ідеалів мають з точністю до асоційовності факторизації лише таких самих кліткових виглядів.

У даній роботі встановлено умови, за яких кожній факторизації діагональних кліток клітково-трикутної матриці над областю головних ідеалів відповідає єдина з точністю до асоційовності клітково-трикутна факторизація цієї матриці, та запропоновано спосіб побудови таких факторизацій.

Нехай R — комутативна область головних ідеалів. Будемо позначати через $M(m,n,R)$ та $M(n,R)$ — множину $m \times n$-матриць і кільце $n \times n$-матриць над R відповідно.

Розглянемо неособливу верхню клітково-трикутну матрицю $T \in M(n,R)$, тобто

$$T = \|T_{pq}\|_1^k, \quad T_{pq} \in M(n_p, n_q, R), \quad \text{і} \quad T_{pq} = 0, \quad \text{якщо} \quad p > q, \quad p,q = 1,\dots,k. \tag{1}$$

Нехай діагональні клітки T_{pp}, $p = 1,\dots,k$, матриці T розкладаються на множники

$$T_{pp} = B_{pp}C_{pp}, \qquad p = 1,\dots,k, \tag{2}$$

і для матриці T існує розклад на клітково-трикутні множники вигляду

$$T = BC = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1k} \\ 0 & B_{22} & \dots & B_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{kk} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1k} \\ 0 & C_{22} & \dots & C_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{kk} \end{Vmatrix}, \qquad (3)$$

де B_{pp}, $C_{pp} \in M(n_p, R)$, B_{pq}, $C_{pq} \in M(n_p, n_q, R)$, $p, q = 1, \dots, k$, $p < q$. Факторизацію (3) матриці T будемо називати відповідною до факторизації (2) її діагональних кліток T_{pp}, $p = 1, \dots, k$.

Для матриці T вигляду (1) існує клітково-трикутна факторизація (3), що відповідає факторизації (2) її діагональних кліток T_{pp}, $p = 1, \dots, k$, тоді і тільки тоді, коли має розв'язок система лінійних матричних рівнянь

$$B_{pp}X_{pq} + Y_{pq}C_{qq} + \sum_{l=p+1}^{q-1} Y_{pl}X_{lq} = T_{pq}, \qquad 1 \leqslant p < q \leqslant k, \qquad (4)$$

причому $X_{pq} = C_{pq}$, $Y_{pq} = B_{pq}$, $p < q$, p, $q = 1, \dots, k$, — розв'язки цієї системи.

Розв'язування системи матричних рівнянь (4) зводиться до послідовного розв'язування лінійних різносторонніх матричних рівнянь Сільвестра

$$AX - YB = C, \qquad (5)$$

де $A \in M(m, R)$, $B \in M(n, R)$, $C \in M(m, n, R)$ та $X, Y \in M(m, n, R)$ — невідомі матриці. У роботі [7] встановлено, що матричне рівняння (5) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\begin{Vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{Vmatrix} \qquad \text{та} \qquad \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}$$

є еквівалентними у випадку, коли $R = P$ — поле або $R = P[x]$ — кільце многочленів над полем P.

Для матриць над кільцем головних ідеалів цей результат узагальнено в [8, 9]. Методи відшукання розв'язків та застосування матричних рівнянь Сільвестра і деяких їх спеціальних виглядів наведено в [10].

Над областю головних ідеалів R кожна матриця ліво- або правоасоційована до трикутної форми Ерміта [11], тобто для матриць A і B існують оборотні над R матриці P, Q відповідних розмірів такі, що

$$AP = H^A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{Vmatrix}, \qquad QB = H^B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix},$$

де $a_{ij} \in R_{a_{ii}}$, $i < j$, $i, j = 1, \dots, m$, $b_{st} \in R_{b_{tt}}$, $s < t$, $s, t = 1, \dots, n$, R_δ — повна множина лишків за модулем δ, $\delta \in R$.

Тоді з рівняння (5) отримуємо матричне рівняння

$$H^A W - Z H^B = C, \qquad (6)$$

де $W = P^{-1}X = \|w_{ij}\|_1^{m,n}$, $Z = YQ^{-1} = \|z_{ij}\|_1^{m,n}$.

Лема 1. *Для матричного рівняння* (6) *існує єдиний розв'язок* $W_0 = \|w_{ij0}\|_1^{m,n}$, $Z_0 = \|z_{ij0}\|_1^{m,n}$ *такий, що* $z_{ij0} \in R_{a_{ii}}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, *тоді і тільки тоді, коли* $(\det H^A, \det H^B) = 1$.

Доведення. *Необхідність.* З матричного рівняння (6) отримуємо систему лінійних рівнянь

$$\sum_{k=i}^{m} a_{ik} w_{kj} - \sum_{l=1}^{j} b_{lj} z_{il} = c_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

розв'язування якої зводиться до послідовного розв'язування лінійних діофантових рівнянь вигляду

$$a_{ii} w_{ij} - b_{jj} z_{ij} = c_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Лінійне діофантове рівняння (8) має єдиний розв'язок

$$w_{ij} = w_{ij0}, \qquad z_{ij} = z_{ij0} \tag{9}$$

такий, що $z_{ij0} \in R_{a_{ii}}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, тоді і тільки тоді, коли

$$(a_{ii}, b_{jj}) = 1, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Звідси, враховуючи вигляд матриць H^A та H^B, маємо, що $(\det H^A, \det H^B) = 1$. Цим необхідність доведено.

Достатність. За умови $(\det H^A, \det H^B) = 1$ матричне рівняння (6) має розв'язок [8]. Тому має розв'язок і система лінійних рівнянь (7). Враховуючи умову на детермінанти матриць H^A, H^B та їх вигляд, маємо, що виконуються співвідношення (10). А звідси кожне з діофантових рівнянь (8) має єдиний розв'язок вигляду (9). Тому для матричного рівняння (6) існує єдиний розв'язок $W_0 = \|w_{ij0}\|_1^{m,n}$, $Z_0 = \|z_{ij0}\|_1^{m,n}$ такий, що $z_{ij0} \in R_{a_{ii}}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Лему доведено.

Зауважимо, що задача про однозначність розв'язків з певними властивостями матричних многочленних рівнянь Сільвестра досліджувалася в роботах [3, 12–14].

Лема 2. *Нехай діагональні клітки неособливої кліткова-трикутної матриці* T *вигляду* (1) *розкладені на множники* (2). *Якщо* $(\det B_{ss}, \det C_{s+t,s+t}) = 1$, $s = 1 \ldots, k-1$, $t = 1, \ldots, k-s$, *то існує кліткова-трикутна факторизація вигляду* (3) *матриці* T, *що відповідає факторизації* (2) *її діагональних кліток.*

Доведення. Факторизація (3) кліткова-трикутної матриці T, що відповідає факторизації (2) її діагональних кліток, існує тоді і тільки тоді, коли має розв'язок система матричних рівнянь (4), розв'язування якої зводиться до послідовного розв'язування лінійних матричних рівнянь типу Сільвестра

$$B_{pp} X_{pq} + Y_{pq} C_{qq} = T_{pq}, \qquad 1 \leqslant p < q \leqslant k. \tag{11}$$

З умови леми випливає, що $(\det B_{pp}, \det C_{qq}) = 1$, $1 \leqslant p < q \leqslant k$. Тоді кожне з лінійних матричних рівнянь (11) має розв'язок [8], а отже, має розв'язок система матричних рівнянь (4). Тому існує кліткова-трикутна факторизація вигляду (3) матриці T, що відповідає факторизації (2) її діагональних кліток. Лему доведено.

Теорема. *Нехай T — неособлива верхня клітково-трикутна матриця* (1) *і її діагональні клітки розкладені на множники вигляду* (2). *Тоді існує з точністю до асоційовності єдина клітково-трикутна факторизація матриці T, що відповідає факторизації* (2) *її діагональних кліток T_{pp}, $p = 1, \ldots, k$, у тому і тільки тому випадку, коли* $(\det B_{ss}, \det C_{s+t,s+t}) = 1$, *для всіх* $s = 1, \ldots, k-1$, $t = 1, \ldots, k-s$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай для матриці T існує єдина з точністю до асоційовності клітково-трикутна факторизація (3), що відповідає факторизації (2) її діагональних кліток.

Існують оборотні над R матриці U, V такі, що $TU = F$, $BV = H^B$, $V^{-1}CU = D$ — верхні трикутні матриці та H^B у формі Ерміта. Тоді з рівності (3) маємо $F = H^B D$, або

$$\begin{Vmatrix} F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1k} \\ 0 & F_{22} & \ldots & F_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & F_{kk} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} H^{B_{11}} & G_{12} & \ldots & G_{1k} \\ 0 & H^{B_{22}} & \ldots & G_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & H^{B_{kk}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} D_{11} & D_{12} & \ldots & D_{1k} \\ 0 & D_{22} & \ldots & D_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & D_{kk} \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

де $H^{B_{pp}} = B_{pp}V_{pp} = \|h_{ij}^{(p)}\|_1^{n_p}$ — це форма Ерміта клітки B_{pp}, а елементи в i-му рядку матриці $G_{pq} = \|g_{ij}^{(pq)}\|_1^{n_p,n_q}$ належать повній множині лишків за модулем діагонального елемента $h_{ii}^{(p)}$ матриці $H^{B_{pp}}$, тобто $g_{ij}^{(pq)} \in R_{h_{ii}^{(p)}}$, $i = 1, \ldots, n_p$, $j = 1, \ldots, n_q$, $1 \leqslant p < q \leqslant k$.

З факторизації (12) отримуємо, що матриці $X_{pq} = D_{pq}$, $Y_{pq} = G_{pq}$, $1 \leqslant p < q \leqslant k$, є розв'язками системи матричних рівнянь

$$H^{B_{pp}} X_{pq} + Y_{pq} D_{qq} + \sum_{l=p+1}^{q-1} Y_{pl} X_{lg} = F_{pq}, \qquad 1 \leqslant p < q \leqslant k, \tag{13}$$

розв'язування якої зводиться до послідовного розв'язування лінійних матричних рівнянь вигляду

$$H^{B_{pp}} X_{pq} + Y_{pq} D_{qq} = F_{pq}, \qquad 1 \leqslant p < q \leqslant k. \tag{14}$$

Нехай система матричних рівнянь (13) має інший розв'язок $X_{pq} = \widetilde{D}_{pq}$, $Y_{pq} = \widetilde{G}_{pq} = \|\widetilde{g}_{ij}^{(pq)}\|_1^{n_p,n_q}$ такий, що $\widetilde{g}_{ij}^{(pq)} \in R_{h_{ii}^{(p)}}$, $i = 1, \ldots, n_p$, $j = 1, \ldots, n_q$, $1 \leqslant p < q \leqslant k$. Тоді матриця F має факторизацію

$$F = \widetilde{H}^B \widetilde{D},$$

$$\text{де} \quad \widetilde{H}^B = \begin{Vmatrix} H^{B_{11}} & \widetilde{G}_{12} & \ldots & \widetilde{G}_{1k} \\ 0 & H^{B_{22}} & \ldots & \widetilde{G}_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & H^{B_{kk}} \end{Vmatrix}, \qquad \widetilde{D} = \begin{Vmatrix} D_{11} & \widetilde{D}_{12} & \ldots & \widetilde{D}_{1k} \\ 0 & D_{22} & \ldots & \widetilde{D}_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & D_{kk} \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

що відповідає факторизації

$$F_{pp} = H^{B_{pp}} D_{pp}, \qquad p = 1, \ldots, k, \tag{16}$$

її діагональних кліток. У факторизації (15) матриця $\widetilde{H}^B$ має форму Ерміта та не збігається з матрицею H^B з рівності (12). Тому факторизація (15) не є асоційованою до факторизації (12). А отже, матриця T має факторизацію, що відповідає факторизації (2) її діагональних кліток, яка не є асоційованою до факторизації (3) матриці T, що суперечить припущенню про існуванння для матриці T єдиної з точністю до асоційовності такої відповідної факторизації. Необхідність доведено.

Достатність. Існування факторизації вигляду (3) матриці T випливає з леми 2. Доведемо єдиність з точністю до асоційовності такої факторизації.

З факторизації (3) випливає існування факторизації вигляду (12). Далі з умови теореми маємо, що $(\det H^{B_{pp}}, \det D_{qq}) = 1$, $1 \leqslant p < q \leqslant k$. Тому за лемою 1 робимо висновок, що кожне з матричних рівнянь (14) має єдиний розв'язок

$$X_{pq} = \|d_{ij0}^{(pq)}\|_1^{n_p,n_q}, \qquad Y_{pq} = \|g_{ij0}^{(pq)}\|_1^{n_p,n_q}$$

такий, що $g_{ij0}^{(pq)} \in R_{h_{ii}^{(p)}}$, $i = 1, \ldots, n_p$, $j = 1, \ldots, n_q$, $1 \leqslant p < q \leqslant k$.

Отже, матриці D_{pq}, G_{pq}, $1 \leqslant p < q \leqslant k$, з (12) мають вигляд

$$D_{pq} = \|d_{ij0}^{(pq)} + t d_{ii}^{(q)}\|_1^{n_p,n_q}, \qquad G_{pq} = \|g_{ij0}^{(pq)} + t h_{ii}^{(p)}\|_1^{n_p,n_q},$$

де $t \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $g_{ij0}^{(pq)} \in R_{h_{ii}^{(p)}}$, $i = 1, \ldots, n_p$, $j = 1, \ldots, n_q$, $1 \leqslant p < q \leqslant k$, $d_{ii}^{(q)}$, $h_{ii}^{(p)}$ — діагональні елементи матриць D_{qq}, $H^{B_{pp}}$ відповідно. Таким чином, усі факторизації вигляду (12) матриці F, що відповідають розкладам (16) її діагональних кліток, асоційовані між собою.

Нехай для матриці T існує інша клітково-трикутна факторизація, що відповідає факторизації (2) її діагональних кліток, тобто $T = \widetilde{B}\widetilde{C}$, або

$$T = \begin{Vmatrix} B_{11} & \widetilde{B}_{12} & \ldots & \widetilde{B}_{1k} \\ 0 & B_{22} & \ldots & \widetilde{B}_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & B_{kk} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} C_{11} & \widetilde{C}_{12} & \ldots & \widetilde{C}_{1k} \\ 0 & C_{22} & \ldots & \widetilde{C}_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & C_{kk} \end{Vmatrix}, \tag{17}$$

де B_{pp}, $C_{pp} \in M(n_p, R)$, $\widetilde{B}_{pq}$, $\widetilde{C}_{pq} \in M(n_p, n_q, R)$, p, $q = 1, \ldots, k$, $p < q$.

Далі аналогічно, як факторизацію (3), зведемо факторизацію (17) до вигляду (12). Як було показано, усі факторизації вигляду (12) асоційовані між собою. Оскільки факторизації (3) і (12), а також (17) і (12) асоційовані, то асоційовані і факторизації (3) та (17). Отже, факторизація (3) матриці T, що відповідає факторизації (2) її діагональних кліток, є єдиною з точністю до асоційовності. Теорему доведено.

Враховуючи теореми 2 і 3 з [6] та доведену теорему, отримуємо такий наслідок.

Наслідок. *Нехай $T \in M(n, R)$ — неособлива верхня клітково-трикутна матриця вигляду* (1) *і визначники її діагональних кліток T_{pp}, $p = 1, \ldots, k$, розкладені на множники*

$$\det T_{pp} = \varphi_p \psi_p, \qquad p = 1, \ldots, k, \qquad i \qquad \prod_{p=1}^{k} \varphi_p = \varphi, \qquad \prod_{p=1}^{k} \psi_p = \psi. \tag{18}$$

Нехай для співвідношень (18) *виконується хоча б одна з умов:*

а) $\left(\prod\limits_{p=1}^{s} \varphi_p, \psi_{s+1}\right) = 1$, $s = 1, \ldots, k-1$, *і* $((\varphi, \psi), d_{n-1}^T) = 1$;

б) $(\det T_{pp}, (\varphi, \psi)) = 1$, $i = 1, \ldots, k-1$.

Тоді існують факторизації діагональних кліток

$$T_{pp} = B_{pp}C_{pp}, \qquad p = 1, \ldots, k, \tag{19}$$

де $\det B_{pp} = \varphi_p$, $\det C_{pp} = \psi_p$, $p = 1, \ldots, k$, *та відповідна до цієї факторизації діагональних кліток клітково-трикутна факторизація матриці* T

$$T = BC, \qquad \det B = \varphi, \qquad \det C = \psi,$$

і така факторизація матриці T *з точністю до асоційовності є єдиною.*

1. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
2. *Петричкович В. М.* Розкладність на множники клітково-діагональних і клітково-трикутних поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 92–97.
3. *Петричкович В. М.* Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизации клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Мат. заметки. – 1985. – **37**, вып. 6. – С. 789–796.
4. *Шаваровский Б. З.* Поиск полного набора решений или доказательство неразрешимости некоторых классов матричных многочленных уравнений с коммутирующими коэффициентами // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 2007. – **47**, № 12. – С. 1988–1997.
5. *Боревич З. И.* О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов // III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей: Тез. докл. – Тарту: Тартус. ун-т, 1976. – С. 19.
6. *Джалюк Н., Петричкович В.* Факторизація клітково-діагональних та клітково-трикутних матриць над кільцями головних ідеалів // Мат. вісник НТШ. – 2007. – **4**. – С. 79–89.
7. *Roth W. E.* The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – No 3. – P. 392–396.
8. *Newman M.* The Smith normal form of a partitioned matrix // J. Res. Nat. Bur. Stand. B. – 1974. – **78**, No 1. – P. 3–6.
9. *Feinberg R. B.* Equivalence of partitioned matrices // Ibid. – 1976. – **80**, No 1. – P. 89–97.
10. *Kaczorek T.* Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. – London: Springer, 2007. – 503 p.
11. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Academic Press, 1972. – 224 p.
12. *Barnett S.* Regular polynomial matrices having relatively prime determinants // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1969. – **65**, pr. 3. – P. 585–590.
13. *Feinstein J., Bar-Ness Y.* On the uniqueness of the minimal solution to the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ // J. Franklin Inst. – 1980. – **310**, No 2. – P. 131–134.
14. *Prokip V. M.* About the uniqueness solution of the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) - Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ // Lobachev. J. Math. – 2008. – **29**, No 3. – P. 186–191.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 13.04.2009

N. S. Dzhalyuk

The uniqueness of the block-triangular factorizations of the matrices over a principal ideal rings

The necessary and sufficient conditions of uniqueness up to the association of block-triangular factorizations of the block-triangular matrices over principal ideal domains which correspond to the factorizations of their diagonal blocks are established.