УДК 539.3

І. Ю. Хома, Т. М. Прощенко

Загальний розв'язок системи рівнянь рівноваги неоднорідних за товщиною трансверсально-ізотропних пластин

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

На основі методу розкладу функцій у ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини побудовано систему рівнянь рівноваги неоднорідних за товщиною трансверсально-ізотропних пластин і викладено метод знаходження загального аналітичного розв'язку даної системи.

Розглянемо трансверсально-ізотропну пластину постійної товщини $2h$ ($h = \mathrm{const}$), поперечний модуль зсуву $\widehat{G}'$ якої є лінійною функцією товщинної координати x_3, тобто $\widehat{G}' = G'[1 + \delta^*(1+\zeta)]$, де $\zeta = h^{-1}x_3$; G' — константа; δ^* — параметр, що характеризує неоднорідність матеріалу. Приймемо рівняння стану пластини у вигляді

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11} = c_{11}\partial_1 u_1 + c_{12}\partial_2 u_2 + c_{13}\partial_3 u_3; \qquad \sigma_{12} = c_{66}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1);\\
&\sigma_{22} = c_{12}\partial_1 u_1 + c_{11}\partial_2 u_2 + c_{13}\partial_3 u_3; \qquad \sigma_{13} = \widehat{c}_{44}(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1);\\
&\sigma_{33} = c_{13}(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + c_{33}\partial_3 u_3; \qquad \sigma_{23} = \widehat{c}_{44}(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де $\partial_j = \partial/\partial x_j$ ($j = 1,2,3$); $\widehat{c}_{44} = c_{44}(1+\delta\zeta)$; $c_{44} = G'(1+\delta^*)$; $\delta = \delta^*/(1+\delta^*)$; c_{11}, c_{12}, $\ldots$, c_{66} — пружні постійні.

1. Рівняння рівноваги. Наведемо, виходячи з [1, 2], компоненти вектора переміщень $u_j(x_1,x_2,x_3)$ і тензора напружень $\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3)$ у вигляді скінченного ряду Фур'є за поліномами Лежандра $P_k(\zeta)$ координати товщини, тобто

$$
\{u_j(x_1,x_2,x_3), \sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3)\} = \sum_{k=0}^{N}\{u_j^{(k)}(x), h^{-1}\sigma_{ij}^{(k)}(x)\}P_k(\zeta),
\tag{2}
$$

де $x = (x_1,x_2)$ — точка серединної площини пластини; $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ — коефіцієнти розкладу, які називатимемо моментами; N — натуральне число.

Із рівнянь (1) після усереднення за товщиною з використанням поліномів Лежандра отримуємо співвідношення між моментами напружень і переміщень. У комплексній формі вони записуються таким чином:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} = 2h[(c_{12}+c_{66})e^{(k)} + c_{13}h^{-1}\underline{u}_3^{(k)}];\\
&\sigma_{33}^{(k)} = h(c_{13}e^{(k)} + c_{33}h^{-1}\underline{u}_3^{(k)}); \qquad \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)} = 4c_{66}h\partial_{\bar z}u_+^{(k)};\\
&\sigma_+^{(k)} = c_{44}h(2\partial_{\bar z}w_3^{(k)} + h^{-1}\underline{w}_+^{(k)}) \qquad (k = 0,1,\ldots,N),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

де $\quad \underline{u}_j^{(k)} = (2k+1)(u_j^{(k+1)} + u_j^{(k+3)} + \cdots)$, причому $u_j^{(n)} = 0$, якщо $n > N$;

$$\sigma_+^{(k)} = \sigma_{13}^{(k)} + i\sigma_{23}^{(k)}; \qquad u_+^{(k)} = u_1^{(k)} + iu_2^{(k)}; \qquad e^{(k)} = \partial_z u_+^{(k)} + \partial_{\overline{z}}\overline{u}_+^{(k)};$$
$$\underline{w}_+^{(k)} = \underline{u}_+^{(k)} + \delta\underline{u}_+^{(k\pm1)}; \quad w_3^{(k)} = u_3^{(k)} + \delta u_3^{(k\pm1)}; \quad u_j^{(k\pm1)} = \frac{k+1}{2k+3}u_j^{(k+1)} + \frac{k}{2k-1}u_j^{(k-1)}. \tag{4}$$

Моменти напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$ задовольняють систему рівнянь [3, 4]

$$\partial_z(\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)}) + \partial_{\overline{z}}(\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)}) - (2k+1)h^{-1}\sum_{s=0}^{[(k-1)/2]}\sigma_+^{(k-2s-1)} = 0;$$
$$\partial_z\sigma_+^{(k)} + \partial_{\overline{z}}\overline{\sigma}_+^{(k)} - (2k+1)h^{-1}\sum_{s=0}^{[(k-1)/2]}\sigma_{33}^{(k-2s-1)} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, N). \tag{5}$$

Тут символ $[e]$ означає цілу частину числа e.

Підставляючи значення моментів (3) в рівняння рівноваги (5), отримаємо для наближення $N = 2n$ $(n = 1, 2, \ldots, < \infty)$ систему диференціальних рівнянь відносно моментів переміщень, тобто

$$c_{66}\Delta u_+^{(2k)} + 2(c_{12} + c_{66})\partial_{\overline{z}}e^{(2k)} + 2(2k+1)\delta c_{44}h^{-1}\partial_{\overline{z}}u_3^{(2k)} +$$
$$+ (4k+1)h^{-1}\Bigg[-2c_{44}\sum_{s=0}^{k}\partial_{\overline{z}}(u_3^{(2s-1)} + \delta u_3^{(2s)}) + 2c_{13}\sum_{s=k+1}^{n}\partial_{\overline{z}}u_3^{(2s-1)} -$$
$$-c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}(\alpha_{2s-1}^{*(k)}\delta u_+^{(2s-1)} + \beta_{2s}^{(k)}u_+^{(2s)})\Bigg] = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n); \tag{6}$$

$$c_{44}\Delta w_3^{(2k)} + 2k\delta c_{44}h^{-1}e^{(2k)} + (4k+1)h^{-1} \times$$
$$\times \left[-c_{13}\sum_{s=1}^{k}e^{(2s-1)} + c_{44}\sum_{s=k+1}^{n}(e^{(2s-1)} + \delta e^{(2s)}) - c_{33}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\beta_{2s}^{(k)}u_3^{(2s)}\right] = 0; \tag{7}$$

$$c_{66}\Delta u_+^{(2k-1)} + 2(c_{12} + c_{66})\partial_{\overline{z}}e^{(2k-1)} - 2(2k-1)\delta c_{44}h^{-1}\partial_{\overline{z}}u_3^{(2k-1)} +$$
$$+ (4k-1)h^{-1}\Bigg[-2c_{44}\sum_{s=0}^{k-1}\partial_{\overline{z}}(\delta u_3^{(2s-1)} + u_3^{(2s)}) + 2c_{13}\sum_{s=k}^{n}\partial_{\overline{z}}u_3^{(2s)} -$$
$$-c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}(\alpha_{2s-1}^{(k)}u_+^{(2s-1)} + \beta_{2s}^{*(k)}\delta u_+^{(2s)})\Bigg] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \tag{8}$$

$$c_{44}\Delta w_3^{(2k-1)} - 2k\delta c_{44}h^{-1}e^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1} \times$$
$$\times \left[-c_{13}\sum_{s=0}^{k-1}e^{(2s)} + c_{44}\sum_{s=k}^{n}(\delta e^{(2s-1)} + e^{(2s)}) - c_{33}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{2s-1}^{(k)}u_3^{(2s-1)}\right] = 0, \tag{9}$$

де $\Delta = 4\partial^2/\partial_z\partial_{\overline{z}}$ — оператор Лапласа; $\alpha_{2s-1}^{(k)}$, $\alpha_{2s-1}^{*(k)}$ і $\beta_{2s}^{(k)}$, $\beta_{2s}^{*(k)}$ — абсолютні константи вигляду [4].

2. Загальний розв'язок. Викладемо метод побудови загального аналітичного розв'язку системи рівнянь (6)–(9). Розглянемо спочатку рівняння (7) при $k = 0$ і запишемо його таким чином

$$\Delta u_3^{(0)} = -\frac{\delta}{3}\Delta u_3^{(1)} - \frac{1}{h}\sum_{s=1}^{n}(e^{(2s-1)} + \delta e^{(2s)}). \tag{10}$$

Далі застосуємо до (6) операцію ∂_z і в знайдених рівностях розглянемо дійсні частини. Використовуючи при цьому позначення (4) для $e^{(k)}$, матимемо

$$c_{11}\Delta e^{(0)} + c_{13}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\Delta u_3^{(2s)} = 0 \qquad (k = 0); \tag{11}$$

$$c_{11}\Delta e^{(2k)} + (2k+1)\delta c_{44}h^{-1}\Delta u_3^{(2k)} + (4k+1)h^{-1}\left[-c_{44}\sum_{s=0}^{k}\Delta(u_3^{(2s-1)} + \delta u_3^{(2s)}) + \right.$$
$$\left. + c_{13}\sum_{s=k+1}^{n}\Delta u_3^{(2s-1)} - c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}(\alpha_{2s-1}^{*(k)}\delta e^{(2s-1)} + \beta_{2s}^{(k)}e^{(2s)})\right] = 0 \tag{12}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Із рівняння (11) після інтегрування знаходимо момент деформації

$$e^{(0)} = -\frac{c_{13}}{c_{11}h}\sum_{s=1}^{n}u_3^{(2s-1)} + \frac{2c}{c_1c_{11}}u, \tag{13}$$

де u — довільна гармонічна функція; $c = 1 - c_{13}^2/c_{11}c_{33}$; $c_1 = c - c_{66}/c_{11}$.

Якщо застосувати аналогічні перетворення до рівнянь (8), то отримаємо такі рівності:

$$c_{11}\Delta e^{(1)} - c_{44}h^{-1}\Delta(3u_3^{(0)} + \delta u_3^{(1)}) +$$
$$+ 3h^{-1}\left[c_{13}\sum_{s=1}^{n}\Delta u_3^{(2s)} - c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}(e^{(2s-1)} + \delta e^{(2s)})\right] = 0 \qquad (k = 1); \tag{14}$$

$$c_{11}\Delta e^{(2k-1)} - (2k-1)\delta c_{44}h^{-1}\Delta u_3^{(2k-1)} +$$
$$+ (4k-1)h^{-1}\left[-c_{44}\Delta u_3^{(0)} - c_{44}\sum_{s=1}^{n}\Delta(u_3^{(2s)} + \delta u_3^{(2s-1)}) + c_{13}\sum_{s=k}^{n}\Delta u_3^{(2s)} - \right.$$
$$\left. - c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}(\alpha_{2s-1}^{(k)}e^{(2s-1)} + \beta_{2s}^{*(k)}\delta e^{(2s)})\right] = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, n). \tag{15}$$

Враховуючи (10), рівняння (14) набуде вигляду

$$\Delta e^{(1)} + \frac{3c_{13}}{c_{11}h}\sum_{s=1}^{n}\Delta u_3^{(2s)} = 0.$$

Звідси випливає, що

$$e^{(1)} = -\frac{3c_{13}}{c_{11}h}\sum_{s=1}^{n}\Delta u_3^{(2s)} - \frac{4ch}{c_{66}}\widetilde{u}, \tag{16}$$

де $\widetilde{u}$ — довільна гармонічна функція.

Введемо функції u_l ($l = 1, 2, \ldots, 4n-1$) згідно з формулами

$$\begin{aligned}
&c_{66}u_3^{(1)} = -\kappa_1^* hu + u_1; \qquad c_{66}u_3^{(2)} = \nu_2^* h^2\widetilde{u} + u_2;\\
&c_{66}u_3^{(k)} = u_{2k-1} \qquad (k = 3, 4, \ldots, 2n); \qquad c_{66}he^{(k)} = u_{2k-2} \qquad (k = 2, 3, \ldots, 2n),
\end{aligned} \tag{17}$$

в яких $\kappa_1^* = 2c_{13}c_{66}/c_1c_{11}c_{33}$; $\nu_2^* = 4c_{13}/3c_{33}$, і виразимо через них моменти деформацій $e^{(0)}$, $e^{(1)}$ та $\Delta u_3^{(0)}$. Отже,

$$\begin{aligned}
&c_{66}e^{(0)} = \frac{2c_{66}}{c_1c_{11}}u - \frac{c_{13}}{c_{11}h}\sum_{s=1}^{n}u_{4s-3}; \qquad c_{66}e^{(1)} = -4h\widetilde{u} - \frac{3c_{13}}{c_{11}h}\sum_{s=1}^{n}u_{4s-1};\\
&c_{66}\Delta u_3^{(0)} = 4\widetilde{u} - \frac{\delta}{3}(\Delta u_1 + 3h^{-2}u_2) + \frac{3c_{13}}{c_{11}h^2}\sum_{s=1}^{n}u_{4s-1} - \frac{1}{h^2}\sum_{s=2}^{n}(u_{4s-4} + \delta u_{4s-2}).
\end{aligned} \tag{18}$$

Підставляючи (17) і (18) в рівняння (7), (9), (12), (15), отримаємо однорідну систему відносно u_l, яку запишемо в стандартній формі таким чином:

$$\sum_{l=1}^{4n-1}(a_{kl} - b_{kl}h^2\Delta)u_l = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 4n-1). \tag{19}$$

Розглянемо характеристичне рівняння

$$\det\|a_{kl} - kb_{kl}\| = 0$$

і будемо вважати, що воно має прості і відмінні від нуля корені k_m. Тоді розв'язок системи (19) матиме, згідно з [5], вигляд

$$u_k = \sum_{m=1}^{4n-1}G_m^{(k)}V_m, \tag{20}$$

де V_m — метагармонічні функції, що забезпечують виконання рівностей

$$\Delta V_m - k_m h^{-2}V_m = 0, \tag{21}$$

$G_m^{(k)}$ — константи, які визначаються алгебраїчними доповненнями елементів будь-якого рядка визначника $|a_{kl} - kb_{kl}|_{(4n-1)\times(4n-1)}$.

Приймемо надалі гармонічні функції u і $\widetilde{u}$ у вигляді дійсних частин деяких аналітичних функцій $\varphi'(z)$ і $\phi'(z)$, тобто

$$u = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}, \qquad \widetilde{u} = \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \tag{22}$$

(штрих означає похідну за змінною z). З урахуванням формул (17), (18), (20) і (22) моменти переміщень $u_3^{(k)}$ набудуть вигляду

$$c_{66}u_3^{(1)} = -\kappa_1^* h[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + \sum_{m=1}^{4n-1} c_m^{(1)} V_m;$$
$$c_{66}u_3^{(2)} = \nu_2^* h^2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] + \sum_{m=1}^{4n-1} c_m^{(2)} V_m; \qquad (23)$$
$$c_{66}u_3^{(k)} = \sum_{m=1}^{4n-1} c_m^{(k)} V_m \qquad (k = 3, 4, \ldots, 2n),$$

а деформації $e^{(k)}$ запишуться таким чином:

$$c_{66}e^{(0)} = \frac{2c_{66}}{c_1 c_{11}}[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + \frac{1}{h}\sum_{m=1}^{4n-1} \widetilde{c}_m^{(0)} V_m;$$
$$c_{66}e^{(1)} = -4h[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] + \frac{1}{h}\sum_{m=1}^{4n-1} \widetilde{c}_m^{(1)} V_m; \qquad (24)$$
$$c_{66}e^{(k)} = \frac{1}{h}\sum_{m=1}^{4n-1} \widetilde{c}_m^{(k)} V_m \qquad (k = 2, 3, \ldots, 2n),$$

де $c_m^{(k)}$ $\widetilde{c}_m^{(k)}$ — константи.

Якщо внести значення моментів (23) і (24) в (10), то отримаємо рівняння, з якого визначаємо

$$c_{66}u_3^{(0)} = \overline{z}\phi(z) + z\overline{\phi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} + \sum_{m=1}^{4n-1} c_m^{(0)} V_m, \qquad (25)$$

де $\chi(z)$ — довільна аналітична функція; $c_m^{(0)}$ — константа.

Рівності (24) можна навести у вигляді

$$c_{66}(\partial_z u_+^{(0)} + \partial_{\overline{z}}\overline{u}_+^{(0)}) = \frac{2c_{66}}{c_1 c_{11}}[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + 2h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(0)} \partial_z \partial_{\overline{z}} V_m;$$
$$c_{66}(\partial_z u_+^{(1)} + \partial_{\overline{z}}\overline{u}_+^{(1)}) = -4h[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] + 2h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(1)} \partial_z \partial_{\overline{z}} V_m;$$
$$c_{66}(\partial_z u_+^{(k)} + \partial_{\overline{z}}\overline{u}_+^{(k)}) = 2h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(k)} \partial_z \partial_{\overline{z}} V_m \qquad (k = 2, 3, \ldots, 2n).$$

Звідси знаходимо моменти переміщень

$$
\begin{aligned}
&c_{66}u_+^{(0)} = \frac{2c_{66}}{c_1c_{11}}\varphi(z) + h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(0)}\partial_{\overline{z}}V_m + ih\partial_{\overline{z}}Y_0;\\
&c_{66}u_+^{(1)} = -4h\phi(z) + h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(1)}\partial_{\overline{z}}V_m + ih\partial_{\overline{z}}Y_1;\\
&c_{66}u_+^{(k)} = h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(k)}\partial_{\overline{z}}V_m + ih\partial_{\overline{z}}Y_k \qquad (k = 2, 3, \ldots, 2n).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Тут $a_m^{(k)} = 2k_m^{-1}\tilde{c}_m^{(k)}$; Y_k — довільні досить гладкі дійсні функції. Їх потрібно вибрати такими, щоб виконувались рівняння (6) і (8). Отже, якщо внести в (6) і (8) значення моментів (23)–(26), то отримаємо систему рівнянь відносно функції Y_k, з якої знаходимо

$$
\begin{aligned}
&Y_0 = -ih^{-1}[z\overline{\varphi(z)} - \overline{z}\varphi(z) + \overline{\psi_*(z)} - \psi_*(z)];\\
&Y_1 = 2i\nu_1^*h^2[\overline{\phi'(z)} - \phi'(z)] + 2i[z\overline{\phi(z)} - \overline{z}\phi(z) + \overline{\chi(z)} - \chi(z)] + \sum_{s=1}^{2n} b_s^{(1)}w_s;\\
&Y_2 = -i\kappa_2^*h[\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)] - i\nu_2h^2[\overline{\phi'(z)} - \phi'(z)] + \sum_{s=1}^{2n} b_s^{(2)}w_s;\\
&Y_k = -i\nu_kh^2[\overline{\phi'(z)} - \phi'(z)] + \sum_{s=1}^{2n} b_s^{(k)}w_s \qquad (k = 3, 4, \ldots, 2n),
\end{aligned}
\tag{27}
$$

де $\psi_*(z)$ — довільна аналітична функція; w_s — метагармонічні функції, що задовольняють рівняння Гельмгольца.

Підставляючи значення функцій (27) у формули (26), матимемо

$$
\begin{aligned}
&c_{66}u_+^{(0)} = \kappa^*\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(0)}\partial_{\overline{z}}V_m;\\
&c_{66}u_+^{(1)} = -2h[\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \nu_1^*h^2\overline{\phi''(z)} + \overline{\chi'(z)}] + h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(1)}\partial_{\overline{z}}V_m + ih\sum_{s=1}^{2n} b_s^{(1)}\partial_{\overline{z}}w_s;\\
&c_{66}u_+^{(2)} = \kappa_2^*h^2\overline{\phi''(z)} + \nu_2h^3\overline{\phi''(z)} + h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(2)}\partial_{\overline{z}}V_m + ih\sum_{s=1}^{2n} b_s^{(2)}\partial_{\overline{z}}w_s;\\
&c_{66}u_+^{(k)} = \nu_kh^3\overline{\phi''(z)} + h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(k)}\partial_{\overline{z}}V_m + ih\sum_{s=1}^{2n} b_s^{(k)}\partial_{\overline{z}}w_s \qquad (k = 3, 4, \ldots, 2n),
\end{aligned}
\tag{28}
$$

де $\overline{\psi(z)} = \overline{\psi_*'(z)}$; $\kappa^* = 1 + 2c_{66}/c_1c_{11}$.

Таким чином, функції (23)–(25) разом із (28) складають загальний аналітичний розв'язок системи рівнянь (6)–(9).

1. *Khoma I. Yu.* Complex representation of the equation of a transversally isotropic shell with prestresses // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No 2. – P. 228–237.
2. *Khoma I. Yu., Kondratenko O. A.* Stress distribution around a circular cylindrical cavity in a prestressed plate // Ibid. – 2008. – **44**, No 1. – P. 23–34.
3. *Kondratenko O. A.* Stress state around a circular hole in a prestressed transversally isotropic shell // Ibid. – No 2. – P. 167–174.
4. *Khoma I. Yu.* Representation of solution of the deflection equilibrium equation for thick transversally isotropic plates // J. of Math. Sci. – 2001. – **103**, No 3. – P. 306–313.
5. *Леви Е. Е.* О линейных эллиптических уравнениях в частных производных // Усп. мат. наук. – 1940. – Вып. 8. – С. 249–292.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ
Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 31.03.2009

I. Yu. Khoma, T. M. Proshchenko

The general solution of a system of equations of equilibrium for transversally isotropic plates inhomogeneous in thickness

On the basis of the expansion of functions in Fourier series in Legendre polynomials of the thickness coordinate, a system of equations of equilibrium for transversally isotropic plates inhomogeneous in thickness is obtained, and a method of constructing the general analytic solution of this system is given.