



УДК 620.172.224

© 2010

В. Н. Бастун

Об эффекте Баушингера в трансверсально-изотропных материалах с кинематическим упрочнением

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

Викладено підхід до визначення міри ефекту Баушингера в трансверсально-ізотропних металевих матеріалах, зміцнення яких здійснюється за гіпотезою кінематичного типу. Встановлено залежності міри ефекту Баушингера від величини пластичної деформації при розтязі в напрямку осі симетрії та в ортогональному напрямку. Наведено числовий приклад визначення міри ефекту Баушингера в сталі 28ХЗСНМВФА мартенситного класу. Показано, що анізотропія границі текучості в області малих пластичних деформацій (0–1%) породжує істотну анізотропію міри ефекту Баушингера.

Эффект Баушингера, представляющий простейшее проявление деформационного упрочнения, характеризует накопление поврежденностей в материале при малоцикловом знакопеременном нагружении [1]. В качестве меры эффекта Баушингера обычно принимают величину отношения пределов текучести при изменении знака нагружения материала, предварительно подвергнутого пластическому деформированию путем одноосного растяжения или сжатия [2].

В литературе эффект Баушингера рассматривается применительно к изотропным материалам, где его мера не зависит от направления предварительного деформирования. В случае трансверсально-изотропных материалов меру эффекта Баушингера необходимо определять в направлении двух ортогональных осей, одна из которых совпадает с осью симметрии, а вторая лежит в плоскости изотропии. Указанный вид анизотропии имеет место в металлических полуфабрикатах, получаемых путем волочения в процессах обработки давлением [3]. Определяют меру эффекта Баушингера экспериментальным путем.

Ниже рассмотрена возможность определения меры эффекта Баушингера в трансверсально-изотропных материалах расчетным путем в рамках гипотезы упрочнения кинематического типа. Как показывают экспериментальные исследования [4], кинематическое упрочнение характерно для сталей мартенситного класса и титановых сплавов.

Постановка задачи. Рассмотрим материал, поставляемый в виде прутка, который был получен путем технологического деформирования волочением при растяжении в осевом направлении. Полагаем, что до технологического деформирования материал находился

в изотропном состоянии, в котором достижение пластичности определяется условием постоянства энергии формоизменения.

Введем ортогональную систему координат 1, 2, 3, ось 1 которой совпадает с осью прутка, а оси 2 и 3 лежат в плоскости изотропии. Состояние поставки будем обозначать индексом (0), а состояние после первичного растяжения до величины пластической деформации, равной ε^p , — индексом (1). При этом мера эффекта Баушингера λ в направлении осей 1 и 2 будет определяться соответственно отношениями

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_{1T}^{(-)}(\varepsilon_{11}^{p(1)})}{\sigma_{1T}^{(+)}(\varepsilon_{11}^{p(1)})} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{\sigma_{2T}^{(-)}(\varepsilon_{22}^{p(1)})}{\sigma_{2T}^{(+)}(\varepsilon_{22}^{p(1)})}, \quad (1)$$

где σ_{1T} — предел текучести в направлении оси 1; σ_{2T} — предел текучести в направлении оси 2; $\varepsilon_{11}^{p(1)}$ и $\varepsilon_{22}^{p(1)}$ — пластические деформации при первичном растяжении соответственно в направлении осей 1 и 2; индекс (–) соответствует повторному сжатию после первичного растяжения до достижения пластической деформации $\varepsilon^{p(1)}$, а индекс (+) соответствует повторному растяжению после первичного растяжения до достижения пластической деформации $\varepsilon^{p(1)}$.

Заметим, что мера эффекта Баушингера λ в направлении оси 3 в силу симметрии совпадает с таковой в направлении оси 2 и поэтому рассматриваться не будет.

Для определения входящих в (1) пределов текучести используем условие пластичности анизотропных тел [4], анизотропия которых обусловлена деформационным упрочнением. Это условие в пространстве нормальных напряжений σ_{ii} ($i = 1, 2, 3$) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{2}{3}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33}) - 2\sqrt{\frac{2}{3}}a_1\sigma_{11} + \sqrt{2}\left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} + a_2\right) + \\ & + a_1^2 + a_2^2 - R^2 = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где a_1 , a_2 и R — параметры, характеризующие анизотропию материала. Это уравнение описывает некоторую поверхность, получившую название поверхности нагружения. Смысл параметров a_1 , a_2 и R будет ясен, если поверхность (2) представить в девятимерной плоскости $S_1 - S_2$ пятимерного векторного пространства S_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) [5], где она изобразится окружностью

$$(S_1 - a_1)^2 + (S_2 - a_2)^2 = R^2 \quad (3)$$

с координатами центра a_1 , a_2 и радиусом R .

Компоненты S_1 и S_2 связаны с компонентами девiatorа напряжений S_{ii} соотношениями

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}; \quad S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(S_{22} - S_{33}), \quad (4)$$

где $S_{ii} = \sigma_{ii} - \sigma$, $\sigma = \sigma_{ii}/3$ — среднее напряжение. Тогда

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}); \quad S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{33}). \quad (5)$$

Заметим, что в случае кинематического упрочнения $R = R^{(0)} = \text{const}$, а при технологическом деформировании — волочении путем одноосного растяжения, согласно гипотезе Циглера [6], $a_2 = a_2^{(0)} = 0$.

Функции $\lambda_1(\varepsilon_{11}^{p(1)})$ и $\lambda_2(\varepsilon_{22}^{p(1)})$ будем определять следующим образом.

Мера эффекта Баушингера в направлении оси 1. В этом случае при растяжении до достижения некоторой величины пластической деформации $\varepsilon_{11}^{p(1)}$ траектория центра окружности (3) изобразится отрезком bc на прямой $S_2 = 0$. С учетом граничного условия $\sigma_{11} = \sigma_{1T}$ при $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ и принятых допущений из условия (2) находим

$$\sigma_{1T}^{(\pm)} = \sqrt{\frac{3}{2}}(a_1^{(1)} \pm R^{(0)}). \quad (6)$$

Тогда мера эффекта Баушингера будет равна

$$\lambda_1(\varepsilon_{11}^{p(1)}) = \frac{a_1^{(1)}(\varepsilon_{11}^{p(1)}) - R^{(0)}}{a_1^{(1)}(\varepsilon_{11}^{p(1)}) + R^{(0)}}. \quad (7)$$

Из (6) следует

$$a_1(\varepsilon_{11}^{p(1)}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{1T}^{(+)}(\varepsilon_{11}^{p(1)}) - R^{(0)}. \quad (8)$$

Полагаем, что диаграмма растяжения $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}^{p(1)})$ известна. Тогда, принимая напряжение, соответствующее некоторой фиксированной деформации $\varepsilon_{11}^{p(1)}$, в качестве предела текучести $\sigma_{1T}^{(+)}$, будем считать известной и величину $a_1(\varepsilon_{11}^{p(1)})$.

Величину $R^{(0)}$ в состоянии поставки находим следующим образом. Подставляя в условие (2) последовательно граничные условия $\sigma_{11} = \sigma_{1T}^{(+)(0)}$ при $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ и $\sigma_{22} = \sigma_{2T}^{(+)(0)}$ при $\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0$, получим систему из двух уравнений, из решения которой находим

$$a_1^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(\sigma_{1T}^{(+)(0)})^2 - (\sigma_{2T}^{(+)(0)})^2}{2\sigma_{1T}^{(+)(0)} + \sigma_{2T}^{(+)(0)}} \quad (9)$$

и

$$R^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_{1T}^{(+)(0)} - a_1^{(0)}). \quad (10)$$

Задаваясь на диаграмме $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}^{p(1)})$ рядом значений σ_{11} и находя по формуле (8) соответствующие значения a_1 , по формуле (7) определяем функцию $\lambda_1(\varepsilon_{11}^{p(1)})$.

Зависимость $\lambda_1(\varepsilon_{11}^{p(1)})$ может быть определена также по формуле (1), входящее в нее значение $\sigma_{1T}^{(-)}(\varepsilon_{11}^{p(1)})$ находится из (6). Здесь и далее принимается абсолютное значение предела текучести $\sigma_T^{(-)}$.

Мера эффекта Баушингера в направлении оси 2. Как следует из соотношений (5), одноосному растяжению в направлении оси 2 соответствует траектория нагружения в плоскости $S_1 - S_2$

$$S_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}S_2. \quad (11)$$

При этом траектория центра окружности (3), которая будет смещаться в соответствии с гипотезой Циглера [6] в сторону оси S_2 , изобразится некоторой кривой $a_1(a_2)$. Величины

$\sigma_{2T}^{(\pm)}$ определим, подставляя в условие пластичности (2) граничное условие $\sigma_{22} = \sigma_{2T}^{(\pm)}$ при $\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0$ и решая полученное уравнение относительно $\sigma_{2T}^{(\pm)}$:

$$\sigma_{2T}^{(\pm)} = \frac{3}{4} \left[-\sqrt{2} \left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} - a_2 \right) \pm \sqrt{2 \left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} - a_2 \right)^2 - \frac{8}{3} \left(a_1^2 + a_2^2 - R^{(0)} \right)^2} \right]. \quad (12)$$

Входящие сюда значения $a_1(\varepsilon_{22}^{p(1)})$ и $a_2(\varepsilon_{22}^{p(1)})$ будем находить с помощью графо-аналитического метода [7] следующим образом. Задаемся на прямой (11) рядом точек $\bar{S}^{(1)}, \bar{S}^{(2)}, \dots, \bar{S}^{(n)}$, которым соответствуют деформации растяжения в направлении оси 2 $\bar{\varepsilon}_{22}^{p(1)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{p(2)}, \bar{\varepsilon}_{33}^{p(n)}$. В соответствии с гипотезой [6] центр окружности (3) будет смещаться в направлении вектора, соединяющего ее центр с изображающей точкой на траектории нагружения (11). В данном случае этот вектор на первом этапе будет ориентирован в направлении прямой

$$\frac{S_1 - a_1^{(0)}}{\bar{S}_1^{(1)} - a_1^{(0)}} = \frac{S_2}{\bar{S}_2^{(1)}}, \quad (13)$$

проходящей через точки с координатами 0, $a_1^{(0)}$ и $\bar{S}_1^{(1)}, \bar{S}_2^{(1)}$. Решая совместно уравнения прямой (13) и окружности

$$(S_1 - \bar{S}_1^{(1)})^2 + (S_2 - \bar{S}_2^{(1)})^2 = (R^{(0)})^2 \quad (14)$$

с центром в точке $\bar{S}^{(1)}$ с координатами $(\bar{S}_1^{(1)}, \bar{S}_2^{(1)})$, определим значения координат $a_1^{(1)}$ и $a_2^{(1)}$ нового центра окружности (3), соответствующие точке $\bar{S}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} = & \frac{1}{1 + \left(\frac{\bar{S}_2^{(1)}}{\bar{S}_1^{(1)} - a_1^{(0)}} \right)^2} \left\{ \bar{S}_1^{(1)} + \frac{a_1^{(0)} (\bar{S}_2^{(1)})^2}{(\bar{S}_1^{(1)} - a_1^{(0)})^2} + \frac{(\bar{S}_2^{(1)})^2}{\bar{S}_1^{(1)} - a_1^{(0)}} - \right. \\ & - \left(\left[\bar{S}_1^{(1)} + \frac{a_1^{(0)} (\bar{S}_1^{(1)})^2}{(\bar{S}_1^{(1)} - a_1^{(0)})^2} + \frac{(\bar{S}_2^{(1)})^2}{\bar{S}_1^{(1)} - a_1^{(0)}} \right]^2 - \left[1 + \left(\frac{\bar{S}_2^{(1)}}{\bar{S}_1^{(1)} - a_1^{(0)}} \right)^2 \right] \times \right. \\ & \left. \left. \times \left[(\bar{S}_1^{(1)})^2 + \frac{2(\bar{S}_2^{(1)})^2 a_1^{(0)}}{\bar{S}_1^{(1)} - a_1^{(0)}} + (\bar{S}_2^{(1)})^2 - (R^{(0)})^2 \right] \right)^{1/2} \right\}; \\ a_2^{(1)} = & \frac{\bar{S}_2^{(1)} (a_1^{(1)} - a_1^{(0)})}{\bar{S}_1^{(1)} - a_1^{(0)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее, проводя через точки $a_1(a_1^{(1)}, a_2^{(1)})$ и $\bar{S}^{(2)}(\bar{S}_1^{(2)}, \bar{S}_2^{(2)})$ прямую

$$\frac{S_1 - a_1^{(1)}}{\bar{S}_1^{(2)} - a_1^{(1)}} = \frac{S_2 - a_2^{(1)}}{\bar{S}_2^{(2)} - a_2^{(1)}} \quad (16)$$

и решая уравнение (16) совместно с уравнением окружности

$$(S_1 - \bar{S}_1^{(2)})^2 + (S_2 - \bar{S}_2^{(2)})^2 = (R^{(0)})^2 \quad (17)$$

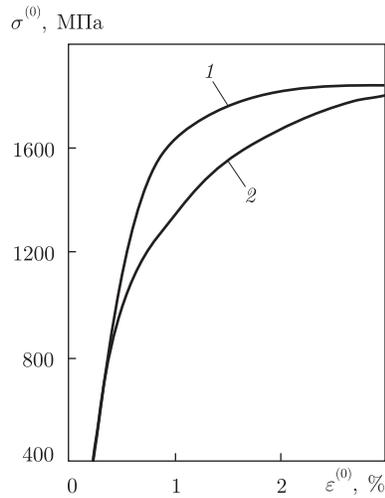


Рис. 1. Диаграммы растяжения стали 28Х3СНМВФА в состоянии поставки в направлении осей 1 и 2

с центром в точке $\bar{S}^{(2)}$, находим новое положение центра окружности (3), соответствующее точке $\bar{S}^{(2)}$. Поступая и далее аналогичным образом, получаем ряд точек, определяющих траекторию центра поверхности нагружения при растяжении материала прутка в направлении оси 2. Значения пластической деформации ε_{22}^p , соответствующие точкам $\bar{S}^{(n)}$, найдем из кривой деформирования $\sigma_{22}^{(0)}(\varepsilon_{22}^{(0)})$, которая определяется экспериментально. Ее можно установить также расчетным путем, используя один из вариантов теории пластичности анизотропных тел.

Числовой пример. В качестве примера определим меру эффекта Баушингера в двух ортогональных направлениях — в направлении оси симметрии и оси, лежащей в плоскости изотропии. Материал — прутки диаметром 40 мм из стали 28Х3СНМВФА мартенситного класса, получен путем волочения и подвергнут упрочняющей термической обработке. В указанном состоянии материал имеет следующие значения пределов текучести: в направлении оси симметрии $\sigma_{1T}^{(0)} = 1710$ МПа, в направлении ортогональных осей 2 и 3, лежащих в плоскости изотропии, $\sigma_{2T}^{(0)} \approx \sigma_{3T}^{(0)} = 1350$ МПа. Значения предела прочности σ_B и модуля Юнга E в разных направлениях практически одинаковы и равны соответственно 1860 МПа и $2 \cdot 10^5$ МПа. Диаграммы растяжения $\sigma_{11}^{(0)}(\varepsilon_{11}^{(0)})$ и $\sigma_{22}^{(0)}(\varepsilon_{22}^{(0)})$ в направлении осей 1 и 2 приведены на рис. 1 соответственно в виде кривых 1 и 2.

По формулам (9) и (10) находим: $a_1^{(0)} = 175$ МПа, $R^0 = 1215$ МПа = const. В рассматриваемом случае, как указывалось выше, $a_2^{(0)} = 0$. Задаваясь на диаграмме $\sigma_{11}^{(0)}(\varepsilon_{11}^{(0)})$ рядом значений σ_{11} и полагая, что они совпадают с пределами текучести $\sigma_{1T}^{(+)}$ (см. табл. 1), опре-

Таблица 1. Характеристики материала при растяжении в направлении оси 1

$\sigma_{1T}^{(+)}$, МПа	ε_{11}^p , %	$a_1^{(1)}$, МПа	$a_2^{(1)}$, МПа	$\sigma_{1T}^{(-)}$, МПа
1710	0	175	0	1360
1760	0,4	253	0	1170
1830	1,1	280	0	1135
1840	1,9	290	0	1115
1850	2,5	290	0	1115

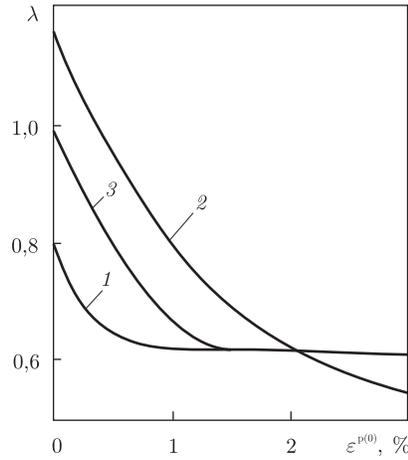


Рис. 2. Зависимости меры эффекта Баушингера в направлении осей 1 и 2

деляем соответствующие значения $a_1^{(1)}(\varepsilon_{11}^{p(1)})$, а по формуле (7) находим зависимость меры эффекта Баушингера $\lambda_1(\varepsilon_{11}^{p(1)})$ в направлении оси 1 (рис. 2, кривая 1). Для нахождения пластических составляющих деформаций из полных деформаций $\varepsilon_{11}^{(1)}$ вычитаем упругие составляющие $\varepsilon_{11}^{e(1)} = \sigma_{11}^{(1)}/E$.

Зависимость меры эффекта Баушингера $\lambda_2(\varepsilon_{22}^{p(1)})$ в направлении оси 2 определим, задаваясь на кривой 2 (рис. 1), рядом значений напряжений $\sigma_{22} = \sigma_{2T}^{(+)}$ (см. табл. 2). Здесь же указаны соответствующие им значения пластической деформации ε_{22}^p , величин a_1 и a_2 (определяются по формулам (15)) и соответствующие значения пределов текучести $\sigma_{2T}^{(-)}$ (определяются по формулам (12)). Определенная таким образом, согласно (1), зависимость $\lambda_2(\varepsilon_{22}^{p(1)})$ приведена на рис. 2, кривая 2. Здесь же для сравнения кривой 3 показана зависимость $\lambda(\varepsilon^p)$ для стали 28ХЗСНМВФА в изотропном состоянии после отжига и последующей упрочняющей термической обработки. Как видно, рассмотренный материал проявляет в области пластических деформаций $\varepsilon^{p(1)}$ 0–1% существенную анизотропию относительно меры эффекта Баушингера. С увеличением $\varepsilon^{p(1)}$ эта анизотропия становится менее выраженной.

Таким образом, на основании проведенного исследования можно отметить, что изложенный выше приближенный подход позволяет оценивать расчетным путем меру эффекта Баушингера в трансверсально-изотропных материалах, упрочняющихся в соответствии с гипотезой кинематического типа, в направлении двух ортогональных осей, одна из которых совпадает с осью симметрии, а вторая лежит в плоскости изотропии. Согласно этому подходу, в расчетах используются диаграммы одноосного растяжения материала (в состоянии поставки) в указанных ортогональных направлениях.

Таблица 2. Характеристики материала при растяжении в направлении оси 2

$\sigma_{2T}^{(+)}$, МПа	ε_{22}^p , %	$a_1^{(1)}$, МПа	$a_2^{(1)}$, МПа	$\sigma_{2T}^{(-)}$, МПа
1350	0	175	0	1565
1390	0,3	155	25	1480
1550	0,7	75	235	1370
1710	1,3	0	325	1213
1845	2,5	-60	370	1080

1. Гігін'як Ф. Ф., Лебедев А. О., Шкодзінський О. К. Міцність конструкційних матеріалів при малоцикловому навантаженні за умов складного напруженого стану. – Київ: Наук. думка, 2003. – 270 с.
2. Шапошников В. А. Механические испытания металлов. – Москва; Ленинград: Машгиз, 1954. – 436 с.
3. Микляев П. Г., Фридман Я. Б. Анизотропия механических свойств металлов. – Москва: Металлургия, 1986. – 225 с.
4. Бастун В. Н., Каминский А. А. Прикладные проблемы механики процессов деформационного упрочнения конструкционных металлических материалов // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 10. – С. 12–52.
5. Ильюшин А. А. Пластичность. Общая математическая теория. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
6. Ziegler H. A modification of Prager's hardening rule // Quart. Appl. Math. – 1959. – No 17. – P. 55–65.
7. Бастун В. Н., Шкарпунта Л. М. К определению связей между напряжениями и деформациями при сложных процессах нагружения на основе учета деформационного упрочнения материала // Пробл. прочности. – 1987. – № 6. – С. 49–54.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 02.06.2009

V. N. Bastun

On the Bauschinger effect in transversely isotropic materials with kinematical hardening

An approach to determining the measure of the Bauschinger effect in transversely isotropic metallic materials whose hardening is described by the hypothesis of kinematic type is outlined. Dependences of the Bauschinger effect measure on the plastic strain at the tension along the axis of symmetry and in the orthogonal direction are established. The numerical example of the determination of the Bauschinger effect in the 28Ch3SNMVFA martensitic steel is presented. It is shown that the anisotropy of yield strength generates an essential anisotropy of the Bauschinger effect measure in the range of small plastic strains (0–1%).