УДК 531.53:517.938

© 2010

Л. Г. Лобас, В. Ю. Ічанський

Вплив типу характеристик пружних елементів на граничні цикли подвійного маятника

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. А. Чернишенком)

Показано, що стійкий і нестійкий граничні цикли існують у фазовому просторі подвійного маятника з нелінійними характеристиками пружних елементів.

У зв'язку з необхідністю трубопровідного транспортування нафти в середині двадцятого століття набули актуальності динамічні процеси у пружних криволінійних трубах з рідиною, що тече всередині них під дією поздовжньої сили [1, 2]. На незвичні явища у пружних трубопроводах одним із перших звернув увагу A. Pflüger [3]. Для знаходження критичного значення слідкуючої сили, перевищення якого призводить до втрати стійкості стану рівноваги, він використав відому концепцію стійкості рівноважних форм пружних твердих тіл і конструкцій, сформульовану Л. Ейлером. Результат виявився несподіваним: критичне навантаження не існує. Прийнятне теоретичне роз'яснення парадоксу Пфлюгера дав H. Ziegler [4], який запропонував дискретну модель континуального стержня у вигляді дволанкового маятника.

Перевернутий дволанковий математичний маятник [5] має три пружні елементи: горизонтальну циліндричну пружину з жорсткістю c, що імітує пружне закріплення верхнього кінця маятника, і дві спіральні пружини з жорсткостями c_1 і c_2 в шарнірах O і A_1 відповідно; m_1, m_2 — маси матеріальних точок A_1 і A_2 відповідно; ланки $OA_1 = l_1$ і $A_1A_2 = l_2$ невагомі; μ_1 — коефіцієнт в'язкості в нижньому шарнірі O, що враховує дію зовнішнього тертя; μ_2 — коефіцієнт в'язкості в проміжному шарнірі A_1, що відображає вплив внутрішнього тертя в системі.

Узагальненими координатами маятника є кути φ_1 і φ_2 відхилення від вертикалі нижньої і верхньої ланок маятника. Вони задовольняють диференціальні рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2). \tag{1}$$

Характеристики пружних елементів (горизонтальної циліндричної пружини на верхньому кінці маятника і спіральних пружин в шарнірних з'єднаннях маятника) можуть бути як лінійними, так і нелінійними. Останні поділяються на жорсткі і м'які.

З [6] маємо такі диференціальні рівняння плоскопаралельного руху подвійного маятника:

$$\begin{gathered}(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 sin(\varphi_1-\varphi_2) = \\ = (m_1+m_2) g l_1 sin\varphi_1 + P l_1 \sin(\varphi_1 - k\varphi_2) - Q_c^h l_1 \cos\varphi_1 - M_1 + M_2, \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1{}^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) = \\ = m_2 g l_2 \sin\varphi_2 + P l_2 \sin[(1-k)\varphi_2] - Q_c^h l_2 \cos\varphi_2 - M_2.\end{gathered} \tag{2}$$

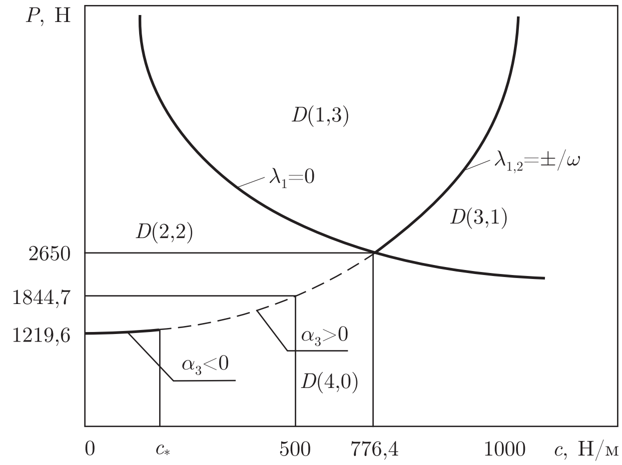

Рис. 1

Жорсткість c пружного закріплення кінця верхньої ланки маятника і модуль P слідкуючої сили $\overrightarrow{P}$ вважатимемо "істотними" параметрами. Значення решти параметрів ("неістотних") приймемо фіксованими:

$$
\begin{aligned}
&m_1 = 10 \text{ кг}, \qquad m_2 = 5 \text{ кг}, \qquad l_1 = l_2 = 0{,}5 \text{ м},\\
&c_1 = c_2 = 400 \text{ Н} \cdot \text{м}, \qquad \mu_1 = \mu_2 = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

На рис. 1 зображено D-розбиття площини параметрів c і P. Тут $D(s, 4-s)$ — області площини параметрів c і P, в яких s коренів характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини, $4-s$ — додатні, тобто $D(4,0)$ — область асимптотичної стійкості: $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$ $(k = 1, \ldots, 4)$; $D(3,1)$ — область дивергентної нестійкості: $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$ $(k = 1, \ldots, 3)$; $D(2,2)$ — область флаттерної (коливальної) нестійкості: $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} > 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{3,4} < 0$.

Рівняння границі областей $D(4,0)$ і $D(2,2)$ має вигляд:

$$P = P_0(c), \tag{4}$$

де P_0 — корінь рівняння $\Delta_3 = 0$; Δ_3 — передостанній визначник Гурвіца

$$\Delta_3 = A_3(A_1A_2 - A_3) - A_1^2A_4. \tag{5}$$

Тут A_k — коефіцієнти характеристичного рівняння матриці A

$$\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0. \tag{6}$$

На кривій (4) рівняння (6) має два суто уявні корені:$\lambda_{1,2} = \pm\omega$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{3,4} < 0$.

Рівняння границі областей $D(4,0)$ і $D(3,1)$ має вигляд:

$$P = P_1(c), \tag{7}$$

де P_1 — корінь рівняння $A_4 = 0$. На кривій (7) рівняння (6) має один нульовий корінь: $\lambda_1 = 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$ $(k = 1, 2, 3)$.

З позицій теорії стійкості О. М. Ляпунова [7] обидва випадки ($\lambda_{1,2} = \pm\omega$ і $\lambda_1 = 0$) є критичними. Стійкість (вертикального) стану рівноваги при $P = P_0(c)$ і $P = P_1(c)$ визначається

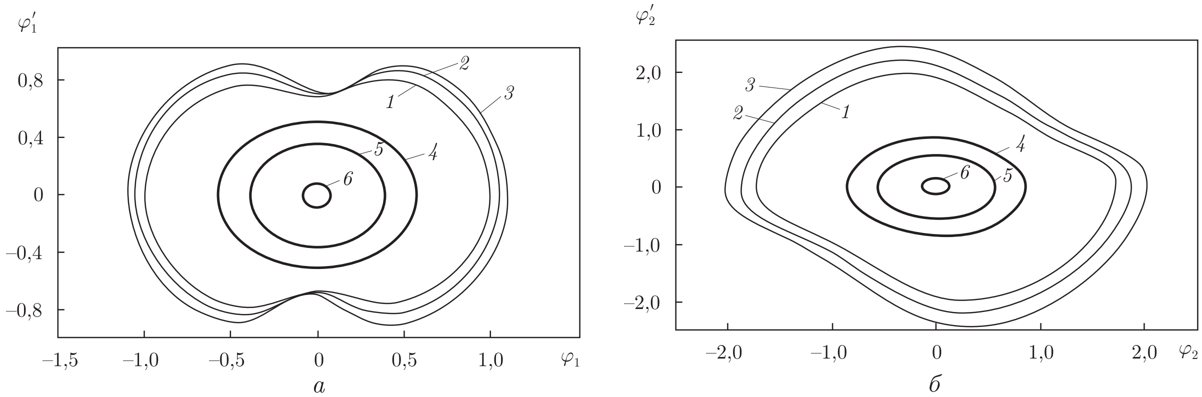

Рис. 2

знаками так званих ненульових ляпуновських величин α_3 і q відповідно. Відомо [8], що крива (4) розбивається на дві ділянки: $\alpha_3 < 0$ (безпечна ділянка за термінологією М. М. Баутіна [9], на ній стан рівноваги є стійким: це — нелінійна стійкість) та $\alpha_3 > 0$ (небезпечна ділянка, на ній стан рівноваги є нестійким: це — нелінійна нестійкість). Крива (7) є безпечною (на ній стан рівноваги є стійким: це — нелінійна стійкість). Вплив типу характеристики пружного елемента дволанкового маятника на межу ділянок стійкості і нестійкості ілюструє табл. 1.

Розглянемо ту частину області $D(4,0)$, для якої $c_* < c < c_{00}$, $c_{00} = 776{,}4$ Н/м, тобто яка проектується в ділянку $\alpha_3 > 0$, і будемо поступово збільшувати $|\overrightarrow{P}|$. На рис. 2 кривими *1–3* зображені двовимірні проекції стійкого граничного циклу (L_+) на площині $\varphi_1\varphi_1'$ і $\varphi_2\varphi_2'$; кривими *4–6* — проекції на ті ж площини нестійкого граничного циклу (L_-). При побудові кривих *1* і *4* прийнято $P = 1630$ Н, тобто $\overline{P} = 2{,}0375$; криві *2* і *5* побудовано для $P = 1730$ Н, тобто $\overline{P} = 2{,}1625$; при побудові кривих *3* і *6* прийнято $P = 1840$ Н, тобто $\overline{P} = 2,3$. Для вказаних P граничні цикли при лінійних характеристиках пружних елементів, а також при жорстких характеристиках для великих значень $\overline{a}$, a_1, a_2, більших 10, і при м'яких характеристиках для значень $\overline{b}$, $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$, що перевищують 6, виявилися практично збіжними. Комп'ютерний аналіз показав, що при малих значеннях P точка $O(0,0,0,0) \in R^4$ є особливою точкою диференціальних рівнянь збуреного руху типу стійкого фокусу. Існує таке значення P_* модуля P слідкуючої сили, при якому у фазовому просторі в околі точки O народжуються одночасно два граничних цикли: стійкий (L_+) і нестійкий (L_-). Зі

Таблиця 1

Характеристика пружних елементів	Значення граничних ходів пружних елементів і сил (моментів)	Границя c_* ділянки стійкості
Лінійні	–	226,35
Жорсткі	$\overline{a} = a_1 = a_2 = 10$	231,64
	$\overline{a} = a_1 = a_2 = 6$	241,07
	$\overline{a} = a_1 = a_2 = 2$	357,85
	$\overline{a} = a_1 = a_2 = 1$	624,35
М'які	$\overline{b} = \overline{b_1} = \overline{b_2} = 6$	226,71
	$\overline{b} = \overline{b_1} = \overline{b_2} = 2$	229,92
	$\overline{b} = \overline{b_1} = \overline{b_2} = 1$	246,35

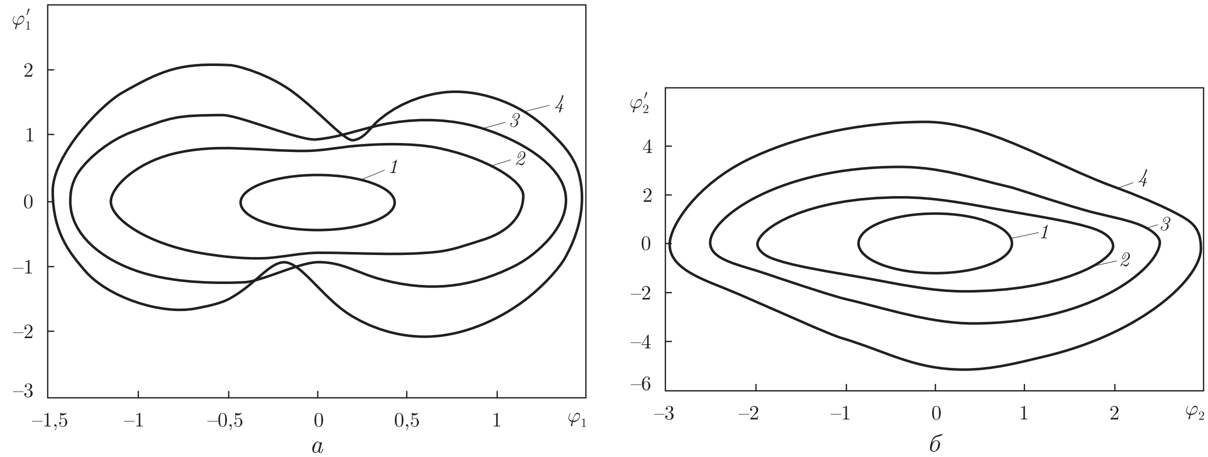

Рис. 3

збільшенням P ці цикли рухаються в протилежних напрямах, цикл (L_+) розбухає, цикл (L_-) стягується. При $P = P_0(c)$ цикл (L_-) "сідає" на початок координат фазового простору, руйнуючи його стійкість. Характер стійкості граничних циклів (L_+) і (L_-) визначався безпосередньою побудовою граничних циклів на комп'ютері.

Біфуркація Андронова–Хопфа відбувається при переході з області $D(4,0)$ в область $D(2,2)$ через ту ділянку границі областей, де $\alpha_3 < 0$. Стан рівноваги втрачає стійкість внаслідок народження в області $D(2,2)$ стійкого граничного циклу (L_+). Про це свідчать двовимірні проекції стійкого граничного циклу (L_+) на площини $\varphi_1\varphi_1'$ і $\varphi_2\varphi_2'$ на рис. 3, причому криві *1–4* побудовані для $P = 1250$ Н, тобто $\overline{P} = 1{,}5625$; $P = 2000$ Н, тобто $\overline{P} = 2{,}5$; $P = 3000$ Н, тобто $\overline{P} = 3{,}75$; $P = 5000$ Н, тобто $\overline{P} = 6{,}25$ відповідно.

Проходження знизу вверх ділянки кривої $P = P_1(c)$ при $c = 500$ приводить до того, що в області $D(3,1)$ спочатку встановлюються періодичні коливання, а при подальшому зростанні P — хаотичні коливання (детермінований хаос).

Характер динамічної поведінки подвійного маятника в області $D(2,2)$ залежить від того, перехід через яку ділянку межі області стійкості викликав нестійкість вертикального стану рівноваги $\varphi_1 = 0$; $\dot{\varphi}_1 = 0$; $\varphi_2 = 0$; $\dot{\varphi}_2 = 0$, причому відповідні теореми Н. Н. Баутіна [9] справедливі лише "поблизу меж області стійкості". Попадання зображаючої точки з області $D(4,0)$ в область $D(2,2)$ через суцільну ділянку приводить до біфуркації Андронова–Хопфа і виникнення стійкого граничного циклу, що обмежує зростання подальших збурень фазових координат $x_1 = \varphi_1$; $x_2 = \varphi_1'$; $x_3 = \varphi_2$; $x_4 = \varphi_2'$, тоді як під час переходу заштрихованої ділянки ці збурення необмежені.

1. *Джупанов В. А., Лилкова-Маркова Св. В.* Динамическая устойчивость консольной трубы, дополнительно опертой комбинированной опорой и проводящей движущуюся жидкоость // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 2. – С. 71–78.
2. *Джупанов В. А., Лилкова-Маркова Св. В.* Зоны дивергентной потери устойчивости консольной трубы, проводящей движущуюся жидкость и опертой на комбинированой опоре // Там же. – 2004. – **40**, № 3. – С. 98–101.
3. *Pflüger A.* Stabilitätsprobleme der Elastostatik. – Berlin; Göttinger; Heidelberg: Springer, 1950. – 339 S.
4. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ingenieur-Archiv. – 1952. – **20**, No 1. – S. 49–56.
5. *Ічанський В. Ю.* Граничні цикли подвійного маятника з жорсткими характеристиками пружних елементів і слідкуючою силою // Доп. НАН України. – 2008. – № 12. – С. 71–73.

6. *Лобас Л. Г.* Об уравнениях опрокинутого маятника с произвольным числом звеньев под воздействием асимметричной следящей силы // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 5. – С. 106–114.
7. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений: В 3-х т. – Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 473 с.
8. *Борук И. Г., Лобас В. Л.* Эволюции предельных циклов в области устойчивости двойного маятника при изменении следящей силы // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 3. – С. 121–129.
9. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – Москва: Наука, 1984. – 176 с.

Державний економіко-технологічний університет транспорту, Київ

Надійшло до редакції 11.06.2009

L. G. Lobas, V. Yu. Ichanskii

Influence of the type of characteristics of elastic elements on a double pendulum limit cycles

It is shown that the stable and unstable limit cycles exist in the phase space of a double pendulum with nonlinear characteristics of elastic elements.